ORSAY
Série A. N°
N° D'ordre :
958

UNIVERSITE PARIS SUD

Centre d'Orsay

Thèses présentées pour obtenir le grade de

Docteur ès Sciences Mathématiques

par

VOGEL Pierre

1ère thèse : **« Variétés multiples d'une immersion générique et cobordisme d'immersions »**

2ème thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 6 juin 1972 devant la Commission d'Examen

H. CARTAN	Président
A. DOUADY	
V. POENARU	Examinateurs
R. THOM	

UNIVERSITE PARIS SUD

Centre d'Orsay

Thèses présentées pour obtenir le grade de

Docteur ès Sciences Mathématiques

par

VOGEL Pierre

1ère thèse : **« Variétés multiples d'une immersion générique et cobordisme d'immersions »**

2ème thèse : Propositions données par la Faculté

Soutenues le 6 juin 1972 devant la Commission d'Examen

H. CARTAN — Président

A. DOUADY
V. POENARU — Examinateurs
R. THOM

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INTRODUCTION

Les travaux de Smale sur les immersions différentiables (1959) ont permis d'établir la classification des immersions par des moyens homotopiques. Malheureusement, cette classification ne permet pas de savoir si une immersion est régulièrement homotope ou non à un plongement, et l'on n'a actuellement sur cette question que des réponses partielles.

Or, si $\alpha : V \to M$ est une immersion générique, les principales obstructions à l'existence d'un plongement régulièrement homotope à α sont les variétés multiples de α, définies à un certain cobordisme près. Il ne serait donc pas sans intérêt de pouvoir déterminer ces variétés à l'aide de moyens homotopiques. Comme ce problème est d'une extrême complexité, nous nous attacherons dans cet ouvrage à obtenir le maximum de renseignements d'ordre homotopique ou homologique sur les variétés multiples de α.

Pour ce faire, nous définirons un certain foncteur $\wedge$ de la catégorie des espaces topologiques pointés ayant le type d'homotopie de C.W. complexes pointés dans elle-même (ch.II & ch.III th.1) et nous associerons à toute immersion α de V dans M une classe d'homotopie d'applications continues de $\hat{M}$, compactifié d'Alexandrov de M, dans $\wedge T\nu$, $T\nu$ étant l'espace de Thom du fibré normal ν de α.

Le foncteur $\wedge$ peut s'interpréter de la façon suivante :

Soient M une variété différentiable sans bord et ξ un fibré vectoriel. On appellera immersion de type ξ dans M (ch.II) tout triplet (V,α,f) où V est une variété différentiable compacte, α une immersion de V dans M et f une application fibrée du fibré normal ν de α dans ξ. On définit sur

...

ces immersions de type ξ dans M une relation de cobordisme (une immersion est cobordante à 0 si elle est le bord d'une immersion dans $M \times I$) et une somme. On obtient ainsi un monoïde $I(\xi, M)$ - qui, en général, est un groupe - et $I(\xi, ?)$ est un foncteur homotopique en $\hat{M}$ qui admet comme classifiant l'espace $\wedge T\xi$.

D'autre part, si ξ est un fibré vectoriel, l'espace $\wedge T\xi$ est canoniquement filtré par des sous-espaces $\wedge_o T\xi \subset \wedge_1 T\xi \subset \ldots$ et l'espace quotient $\wedge_i T\xi / \wedge_{i-1} T\xi$ a le type d'homotopie de l'espace de Thom d'un certain fibré $S_i(\xi)$ qui possède la propriété suivante :

Si α est une immersion générique de V dans M, de fibré normal ν, et si V_i est la i-ième variété multiple de α qui s'immerge dans M par l'immersion α_i, il existe une application fibrée canonique ψ_i du fibré normal ν_i de α_i dans $S_i(\nu)$ (ch.I).

On détermine alors la classe de cobordisme de l'immersion de type $S_i(\nu)$ dans M : (V_i, α_i, ψ_i) à l'aide d'une application continue φ_i de $\wedge T\nu$ dans $\wedge TS_i(\nu)$, et si, $\underset{\sim}{A}$ étant un spectre d'anneau, M est $\underset{\sim}{A}$-orientée, la classe d'homologie de $\tilde{H}_*(TS_i(\nu), \underset{\sim}{A})$ induite par ψ_i et par la classe fondamentale de $T\nu_i$ $\underset{\sim}{A}$-orienté par α_i, se calcule grâce à une application linéaire ρ_{*i} de $H_*(\wedge T\nu, \underset{\sim}{A})$ dans $\tilde{H}_*(TS_i(\nu), \underset{\sim}{A})$ (ch.III th 7 et 8). En fait, à tout espace pointé X on associe fonctoriellement un espace pointé $S_i(X)$, de façon que pour tout fibré vectoriel ξ $S_i(T\xi)$ soit canoniquement homéomorphe à $TS_i(\xi)$, et si X est un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé, les applications φ_i et ρ_{*i} sont définies de $\wedge X$ dans $\wedge S_i(X)$ et de $H_*(\wedge X, A)$ dans $\tilde{H}_*(S_i(X), \underset{\sim}{A})$ respectivement.

Enfin, grâce au classifiant $\wedge T\xi$, on obtient une condition nécessaire et suffisante pour qu'une immersion soit cobordante à un plongement, et donc une condition nécessaire pour qu'une immersion soit régulièrement homotope à un plongement (ch.II § 3.4).

...

Le chapitre I est consacré à une brève étude des immersions multiples d'une immersion générique et de leur fibré normal.

Au chapitre II, on définit les monoïdes $I(\xi, M)$ et, en s'inspirant des travaux de Wells [33], on montre deux théorèmes d'isomorphisme permettant de déterminer ces monoïdes (ch.III, prop.10) ; on construit également les expaces $\wedge X$.

Au chapitre III, on étudie certaines structures homotopiques de $\wedge X$ qui font de $\wedge S^0$ un H-semi-anneau homotopiquement commutatif et de $\wedge X$ un H-module sur $\wedge S^0$ et qui induisent sur l'homologie de $\wedge X$ une structure algébrique particulièrement riche, et l'on définit les applications ω_i, ρ_{*i} et ρ_i^* (l'équivalent de ρ_{*i} en cohomologie), ce qui nécessite une étude très soigneuse du type d'homotopie de $\wedge X$ et du spectre $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$ formé par les espaces $\wedge(S^n \wedge X)$.

Enfin, le chapitre IV est consacré au calcul complet de l'homologie des espaces $\wedge X$ et $S_i(X)$ à cœfficients dans un corps. L'homologie des espaces $S_i(X)$ se détermine bien en fonction de l'homologie des groupes symétriques (étudiée par Nakaoka en 1961) et l'on calcule l'homologie de $\wedge X$ grâce au fait que la somme directe des applications ρ_{*i} est un isomorphisme (ch.III th.5 et 6).

Je tiens à remercier Valentin Poenaru qui, par ses encouragements a grandement contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je remercie également Madame Langeven, secrétaire au Centre Scientifique Universitaire du Mans, qui a bien voulu se charger de la frappe de ce manuscrit.

CHAPITRE I

VARIETES MULTIPLES d'UNE IMMERSION GENERIQUE

§ 1 - Définition des variétés multiples.

Soient V et M deux variétés différentiables, compactes sans bord, respectivement de dimensions n - q et n. Soit α une immersion générique de V dans M (les autointersections de $\alpha(V)$ sont transversales aux points multiples).

Désignons par $V^{(i)}$ l'espace produit V^i privé de toutes ses diagonales. L'immersion α étant générique, induit une application $\alpha^i : V^{(i)} \to M^i$ transversale à la diagonale Δ de M^i, et l'espace $\tilde{V}_i(\alpha)$, image réciproque de Δ par α^i, est une variété différentiable compacte sans bord de dimension n - q i. Par raison de commodité, on conviendra que $\tilde{V}_o(\alpha)$ est la variété M. En fait, pour tout $i \geq 0$, la variété $\tilde{V}_i(\alpha)$ n'est autre que le produit fibré de $V^{(i)}$ par M au-dessus de M^i.

Soit :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_i)$$

un élément de $\tilde{V}_i(\alpha)$, $i > 0$. Si σ est un élément du groupe symétrique S (i) de degré i, posons :

$$\sigma(x_1, \ldots, x_i) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(i)})$$

On vérifie que S (i) opère librement sur $\tilde{V}_i(\alpha)$

Définition

On appelle i-ème variété multiple de l'immersion générique α, la variété $V_i(\alpha)$, quotient de $\tilde{V}_i(\alpha)$ par le groupe S (i).

...

$V_i(\alpha)$ est une variété différentiable, compacte sans bord, de dimension $n - q\,i$, qui s'immerge par une immersion α_i dans M.

§ 2 - Etude du fibré normal de l'immersion α_i

2.1. Définition des espaces $S_i(X)$

On désignera par $\mathbb{R}^\infty$ la limite inductive des $\mathbb{R}^n$.

Soit $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}$ l'espace $(\mathbb{R}^\infty)^i$ privé de ses diagonales. $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}$ est un C.W. complexe contractile sur lequel opère librement le groupe S (i).

Soit X un espace topologique. S (i) opère alors librement sur $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)} \times X^i$ et l'on désignera par $S_i(X)$ l'espace quotient $((\mathbb{R}^\infty)^{(i)} \times X^i)/_{S(i)}$.

Si X est un espace pointé, $S_i(X)$ sera l'espace pointé

$$((\mathbb{R}^\infty)^{(i)} \wedge \underbrace{(X \wedge X \wedge \ldots \wedge X)}_{i \text{ fois}})\ /_{S(i)}$$

Si E est l'espace total d'un fibré vectoriel ξ de dimension q sur X, $S_i(E)$ est l'espace total d'un fibré vectoriel de dimension $q\,i$ sur $S_i(X)$; ce fibré sera noté $S_i(\xi)$.

2.2. Le fibré normal de α_i

Soit f un plongement de V dans $\mathbb{R}^\infty$. On en déduit une application $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{V}_i(\alpha)$ dans $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)} \times V^i$ qui induit une application φ de $V_i(\alpha)$ dans $S_i(V)$. Comme deux plongements de V dans $\mathbb{R}^\infty$ sont isotopes, la classe d'homotopie de φ est indépendante du choix de f.

Proposition 1. Soit ν le fibré normal de α. Alors le fibré normal de α_i est l'image réciproque par φ du fibré $S_i(\nu)$.

Soient $\tilde{\alpha}_i$ l'immersion de $\tilde{V}_i(\alpha)$ dans M, $\tilde{\nu}_i$ son fibré normal,

...

et ν_i le fibré normal de α_i.

Si x est un point de V, on désignera par E_x l'image par d α de l'espace tangent en x à V :

$$E_x = d\alpha (\tau_x(V))$$

Si y est un point de M, on désignera par F_y l'espace tangent $\tau_y(M)$. Un point de l'espace total de $\tilde{\nu}_i$ est un $i+2$ - uple :

$$\omega = (x_1, \ldots, x_i, y, u)$$

avec :

$$(x_1, \ldots, x_i) \in V^{(i)}$$

$$y = \alpha(x_1) = \ldots = \alpha(x_i)$$

$$u \in F_y / E_{x_1} \cap E_{x_2} \cap \ldots \cap E_{x_i}$$

Désignons par u_j la classe de u modulo E_{x_j}, et posons :

$$\tilde{\psi}(\omega) = (f(x_1), \ldots, f(x_i) ; x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_i, u_i)$$

On vérifie que $\tilde{\psi}$ est une application fibrée de $\tilde{\nu}_i$ dans $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)} \times \nu^i$ relative à l'application $\tilde{\varphi}$, et que $\tilde{\psi}$ est bijective sur les fibres. Comme $\tilde{\psi}$ est compatible avec l'action du groupe S (i), on en déduit une application fibrée ψ de ν_i dans $S_i(\nu)$ relative à l'application φ et bijective sur les fibres.

2.3. La classe d'homologie α_i [M]

Soit G un groupe abélien, et supposons M G - orientée. Désignons par B_i l'espace total du fibré en boules de ν_i. B_i est une variété différentiable à bord, compacte de dimension n, et orientée par l'orientation de M. La classe fondamentale de B_i induit par φ un élément de $\tilde{H}_n(TS_i(\nu), G$ $TS_i(\nu)$ désignant l'espace de Thom du fibré $S_i(\nu)$. Cette classe sera notée α_i [M].

...

En fait, on verra plus loin que, si $\underset{\sim}{E}$ est un spectre, on peut définir une application de $H_*(M, \underset{\sim}{E})$ dans $\tilde{H}_*(TS_i(\nu), \underset{\sim}{E})$ qui induit un élément de $\tilde{H}_n(TS_i(\nu), \underset{\sim}{E})$ si M est E-orientée.

Proposition 2. La classe $\alpha_i[M]$ ne dépend que de la classe d'homotopie régulière de α.

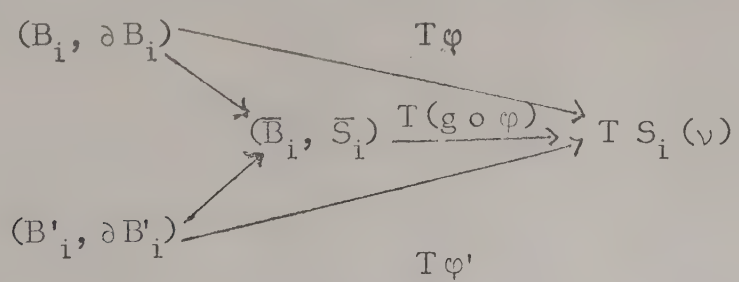
Soient α et α', deux immersions génériques de V dans M, régulièrement homotopes. Par un argument de transversalité, on peut choisir une homotopie régulière β de α à α' qui soit une immersion générique de $V \times I$ dans $M \times I$. On désignera par ν' le fibré normal de β.

On peut alors, comme pour α, construire une variété $V_i(\beta)$, variété différentiable, compacte à bord, de dimension $n + 1 - qi$, de bord $V_i(\alpha) \cup V_i(\alpha')$, et une application φ_1 de $V_i(\beta)$ dans $S_i(V \times I)$ telle que l'image réciproque par φ_1 de $S_i(\nu')$ soit le fibré normal de β_i. Or, la projection de $V \times I$ sur V induit une application fibrée g de $S_i(\nu')$ dans $S_i(\nu)$ bijective sur les fibres. Il en résulte que le fibré normal de β_i est

$$(g \circ \varphi_1)^* S_i(\nu)$$

Soit $\bar{B}_i$ l'espace total du fibré en boules du fibré normal de β_i, et $\bar{S}_i$ l'espace total du fibré en sphères. B_i et B'_i seront les points de $\bar{B}_i$ situés respectivement au-dessus de $V_i(\alpha)$ et $V_i(\alpha')$.

On a alors le diagramme commutatif suivant :



Les deux applications $T\varphi$ et $T\varphi'$ sont donc cobordantes et l'on a :

$$T\varphi_* [B, \partial B] = T\varphi'_* [B', \partial B']$$

Soit :

$$\alpha_i [M] = \alpha'_i [M]$$

Remarque :

Si V et M sont connexes et orientées, ν est orienté. Le fibré $S_i(\nu)$ est alors orienté si q est pair et non orientable si q est impair.

Ainsi, si n est égal à q i (i > 1), on a :

$$\tilde{H}_n (TS_i(\nu)) = \begin{cases} Z & \text{si } q \equiv 0 \pmod 2 \\ Z_2 & \text{si } q \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$\alpha_i[M]$ représente le nombre de points multiples d'ordre i.

CHAPITRE II

COBORDISME D'IMMERSIONS & CLASSIFIANT $\wedge X$

§ 1 - Cobordisme d'immersions

I.1. Immersion de type ξ . Le monoïde $I(\xi, M)$

Soit q un entier positif ou nul. On appellera fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X,A) tout triplet $\xi = (\xi', X, A)$ où (X,A) est une paire d'espaces topologiques ayant le type d'homotopie d'une paire de C.W. complexes, et où ξ' est un fibré vectoriel de dimension q sur X. Si (ξ'_o, X_o, A_o) et (ξ'_1, X_1, A_1) sont deux fibrés de dimension q sur les paires (X_o, A_o) et (X_1, A_1), on appellera application fibrée de (ξ'_o, X_o, A_o) dans (ξ'_1, X_1, A_1) toute application fibrée de ξ'_o dans ξ'_1, linéaire, bijective sur les fibres et induisant sur les bases une application de (X_o, A_o) dans (X_1, A_1). On définit ainsi une catégorie $\mathcal{C}_q$.

Soient M une variété différentiable sans bord de dimension n non nécessairement compacte, et ξ un fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X,A).

Définition

On appellera immersion de type ξ dans M, tout triplet (V, α, f) possédant les propriétés suivantes :

V est une variété différentiable compacte à bord de dimension n-q .

α est une immersion de V dans M.

ν étant le fibré normal de α , f est une application fibrée de $(\nu, V, \partial V)$ dans ξ.

...

Définition

Soient (V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1) deux immersions de type ξ dans M. On dira que ces deux immersions sont cobordantes, s'il existe un 4-uple (V', A', α', f') possédant les propriétés suivantes :

V' est une variété différentiable compacte à coins de dimension $n - q + 1$.

A' est une variété différentiable compacte à bord de dimension $n - q$.

$$\partial V' = V_o \cup V_1 \cup A'.$$

A' coupe transversalement V_o en ∂V_o et V_1 en ∂V_1.

α' est une immersion de V' dans $M \times I$ normale à $M \times \partial I$.

$$\forall x \in V_o \qquad \alpha'(x) = (\alpha_o(x), 0)$$

$$\forall x \in V_1 \qquad \alpha'(x) = (\alpha_1(x), 1)$$

ν_o, ν_1 et ν' étant les fibrés normaux de α_o, α_1 et α', f' est une application fibrée de (ν', V', A') dans ξ, telle que :

$$f' \mid \nu_o = f_o \qquad f' \mid \nu_1 = f_1$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur les immersions de type ξ dansM, et l'on désignera par $I(\xi, M)$ l'ensemble quotient.

Soient (V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1) deux immersions de type ξ dans M. On appellera somme de ces deux immersions le triplet (V_2, α_2, f_2) défini par :

V_2 est la somme disjointe de V_o et de V_1

$$\alpha_2 \mid V_o = \alpha_o \qquad \alpha_2 \mid V_1 = \alpha_1$$

$$f_2 \mid \nu_o = f_o \qquad f_2 \mid \nu_1 = f_1$$

...

Cette somme est compatible avec le cobordisme et définit sur $I(\xi, M)$ une structure de monoïde commutatif avec élément neutre.

Remarque :

Dans la pratique ξ sera soit le fibré universel sur le classifiant d'un groupe de Lie, soit le fibré normal d'une immersion ; en effet, si V est une variété différentiable compacte à bord et α une immersion de V dans M, de fibré normal ν, le triplet (V, α, Id_ν) définit un élément de $I((\nu, V, \partial V), M)$. Ainsi l'étude des éléments de $I((\nu, V, \partial V), M)$ donnera des renseignements sur l'immersion α.

I.2. Fonctorialité de $I(\xi, M)$

Par construction $I(\xi, M)$ est évidemment fonctoriel en ξ, et si g et g' sont deux applications fibrées de (ξ'_o, X_o, A_o) dans (ξ'_1, X_1, A_1) homotopes dans $\mathcal{C}_q$, les deux applications $I(g, M)$ et $I(g', M)$ sont égales. ($I(?, M)$ est un H-foncteur covariant de $\mathcal{C}_q$ dans la catégorie des monoïdes commutatifs).

Nous allons montrer que $I(\xi, M)$ est également fonctoriel en M :

Proposition 1. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des variétés différentiables sans bord, et des applications continues propres. Alors $I(\xi, ?)$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des monoïdes commutatifs. De plus, si φ et φ' sont deux applications de $\mathcal{C}$ homotopes dans $\mathcal{C}$, les applications induites $I(\xi, \varphi)$ et $I(\xi, \varphi')$ sont égales.

Soient M et M' deux variétés différentiables sans bord de dimension n et n'. Soit φ une application continue propre de M' dans M.

...

Soit (V,α, f) une immersion de type ξ dans M. Par un argument de transversalité, on peut construire une application φ'homotope à φ dans une homotopie à support compact, différentiable au-dessus d'un voisinage de $\alpha(V)$ et transversale à $\alpha(V)$ et à $\alpha(\partial V)$. Désignons par V' le produit fibré de V et de M' au-dessus de M. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\alpha'} & M' \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ V & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

Comme φ' est transversale à $\alpha(V)$, V' est une variété différentiable et compacte car φ' est propre.

Soit U un voisinage ouvert de $\alpha(V)$ dans M, au-dessus duquel φ' est différentiable. On a alors, pour les fibrés tangents, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tau V' & \xrightarrow{d\alpha'} & \tau(\varphi'^{-1} U) \\ d\psi \downarrow & & \downarrow d\varphi' \\ \tau V & \xrightarrow{d\alpha} & \tau U \end{array}$$

L'injectivité sur les fibres de $d\alpha$ entraîne celle de $d\alpha'$, et α' est une immersion. Soient ν et ν' les fibrés normaux de α et de α' $d\varphi'$ et $d\psi$ induisent une application fibrée g de ν' dans ν, fibrée au-dessus de ψ. On vérifie aisément que g est bijective sur les fibres.

On posera :

$$\varphi'^{*}(V, \alpha, f) = (V', \alpha', f \circ g)$$

$\varphi'^{*}(V,\alpha, f)$ est une immersion de type ξ dans M'.

Soient maintenant (V_1,α_1, f_1) une immersion de type ξ dans M cobordante à (V,α,f), φ_1 une application continue propre de M' dans M homotope dans $\mathcal{C}$ à φ, et φ'_1 une application continue propre différentiable au-dessus d'un voisinage de $\alpha_1(V_1)$, transversale à $\alpha_1(V_1)$ et à $\alpha_1(\partial V_1)$ et homotope à φ_1 dans une homotopie à support compact.

Choisissons un cobordisme $(\hat{V}, \hat{A}, \hat{\alpha}, \hat{f})$ entre (V, α, f) et (V_1, α_1, f_1). Soit $h : M' \times I \to M \times I$ une application propre réalisant une homotopie entre φ' et φ'_1, et différentiable sur un voisinage de $\varphi'^{-1}(\alpha(V)) \times \{0\}$ et sur un voisinage de $\varphi'^{-1}(\alpha_1(V_1)) \times \{1\}$. On peut alors trouver une application $h' : M' \times I \to M \times I$ homotope dans une homotopie à support compact à h, égale à h au voisinage de $M' \times \{0\} \cup M' \times \{1\}$ différentiable sur un voisinage de $h'^{-1}(\hat{\alpha}(\hat{V}))$ et transversale à $\hat{\alpha}(\hat{V})$ et à $\hat{\alpha}(\hat{A})$.

Désignons par $\hat{V}'$ le produit fibré de $\hat{V}$ et de $M' \times I$ au-dessus de $M \times I$:

$$\begin{array}{ccc} \hat{V}' & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & M' \times I \\ k \downarrow & & \downarrow h' \\ \hat{V} & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & M \times I \end{array}$$

On vérifie que $\hat{\alpha}'$ est une immersion, et que l'application fibrée (partiellement définie) d h' induit une application $\hat{g}$ du fibré normal $\hat{\nu}'$ de $\hat{\alpha}'$ sur le fibré normal $\hat{\nu}$ de $\hat{\alpha}$. Le 4-uple $(\hat{V}', k^{-1}\hat{A}, \hat{\alpha}', \hat{f} \circ \hat{g})$ définit alors un cobordisme entre $\varphi'^{*}(V, \alpha, f)$ et $\varphi'^{*}_1(V_1, \alpha_1, f_1)$.

On définit ainsi une application φ^* de $I(\xi, M)$ dans $I(\xi, M')$, et l'on vérifie que si φ est homotope à φ_1 (dans une homotopie propre), φ^* est égal à φ_1^*.

On démontre alors aisément la proposition.

§ 2 - Deux théorèmes d'isomorphisme

2.1. Premier théorème d'isomorphisme

Soit ξ un fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X,A).

...

Choisissons une métrique riemannienne sur ξ' et désignons par B l'espace total du fibré en boules de ξ', par S l'espace total du fibré en sphères de ξ' et par B' l'ensemble des points de B situés au-dessus de A.

On désignera par $T\xi$ l'espace de Thom de ξ, quotient de B par B' $\cup$ S. $T\xi$ a le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé et est indépendant, à homéomorphisme près, du choix de la métrique riemannienne sur ξ'. On désignera par * le point de base de $T\xi$.

Dans la suite, on identifiera toujours un espace topologique pointé Y, de point de base y, au fibré vectoriel de dimension zéro sur la paire (Y,y).

Théorème 1.

Les deux foncteurs $I(\xi, ?)$ et $I(T\xi, ?)$ sont isomorphes.

a) Construction de l'application $\theta : I(\xi, M) \to I(T\xi, M)$

Soit (V, α, f) une immersion de type ξ dans M, variété différentiable sans bord de dimension n. On désignera par ν le fibré normal de α.

Choisissons une structure riemannienne sur M. α induit une structure riemannienne sur ν. Choisissons alors une application fibrée g de $(\nu, V, \partial V)$ dans ξ, homotope à f et compatible avec les structures riemanniennes de ν et de ξ. Les deux immersions (V, α, f) et (V, α, g) sont cobordantes.

On désignera par $E(\nu)$ l'espace total du fibré ν. $E(\nu)$ est une variété différentiable à bord de dimension n.

Si ε est un nombre strictement positif, on désignera par $B_\varepsilon(\nu)$

...

et $S_\varepsilon(\nu)$, l'ensemble des vecteurs de $E(\nu)$ de norme respectivement inférieure ou égale à ε et égale à ε. On désignera également par $B'_\varepsilon(\nu)$ l'ensemble des points de $B_\varepsilon(\nu)$ situés au-dessus de ∂V.

$B_\varepsilon(\nu)$ est une variété différentiable compacte à coins, de bord $B'_\varepsilon(\nu) \cup S_\varepsilon(\nu)$.

α étant une immersion, on déduit, par l'application exponentielle, une application différentiable α' de $E(\nu)$ dans M, qui induit, pour ε assez petit, une immersion de $B_\varepsilon(\nu)$ dans M prolongeant α. Désignons par $\varepsilon\cdot : B_1(\nu) \to B_\varepsilon(\nu)$, la multiplication par ε. Alors l'application $\beta_\varepsilon = \alpha' \circ \varepsilon\cdot$ est une immersion de $B_1(\nu)$ dans M qui prolonge α. De plus, g induit une application continue h de $(B_1(\nu), B'_1(\nu) \cup S_1(\nu))$ dans $T\xi$.

Soit ω un voisinage contractile de * dans $T\xi$. Choisissons une sous-variété compacte à bord W de $B_1(\nu)$ de dimension n telle que $W \cup h^{-1}(\omega)$ soit égale à $B_1(\nu)$. Il existe alors une application h' de $(B_1(\nu), B'_1(\nu) \cup S_1(\nu))$ dans $T\xi$, homotope à h, et envoyant le complémentaire de $\overset{\circ}{W}$ dans $B_1(\nu)$, au point de base de $T\xi$.

On vérifie que $(W, \beta_\varepsilon | W, h' | W)$ est une immersion de type $T\xi$ dans M.

Soit maintenant (V_1, α_1, f_1) une immersion de type ξ dans M cobordante à (V, α, f). On définit alors, comme ci-dessus, une immersion de type $T\xi$ dans M : $(W_1, \beta_{1\varepsilon_1}|_{W_1}, h'_1|_{W_1})$. Nous allons montrer que les deux immersions de type $T\xi$ dans M ainsi définies sont cobordantes. Nous aurons ainsi défini l'application θ.

Soit $(\hat{V}, \hat{A}, \hat{\alpha}, \hat{f})$ un cobordisme entre (V, α, f) et (V_1, α_1, f_1). On désignera par $\hat{\nu}$ le fibré normal de $\hat{\alpha}$, par $E(\hat{\nu})$ l'espace total de $\hat{\nu}$. La structure riemannienne canonique de $M \times I$ induit par $\hat{\alpha}$ une structure riemannienne sur $\hat{\nu}$, et l'on désignera par $B_\varepsilon(\hat{\nu})$ et $S_\varepsilon(\hat{\nu})$,

...

les espaces totaux du fibré en boules de rayon ε et du fibré en sphères de rayon ε de $\hat{\nu}$. Enfin, on désignera par $B'_{\varepsilon}(\hat{\nu})$ l'ensemble des points de $B_{\varepsilon}(\hat{\nu})$ situés au-dessus de $\hat{A}$.

Il existe alors une application fibrée $\hat{g}$ de $(\hat{\nu}, \hat{V}, \hat{A})$ dans ξ homotope à $\hat{f}$ possédant les propriétés suivantes :

$\hat{g}$ est compatible avec les structures riemanniennes de $\hat{\nu}$ et de ξ.

$$\hat{g}_{|\nu} = g \qquad \hat{g}_{|\nu_1} = g_1$$

Par l'exponentielle, on définit l'application $\hat{\alpha}'$ de $E(\hat{\nu})$ dans $M \times \mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall\, x \in E(\nu) \qquad \hat{\alpha}'(x) = (\alpha'(x), 0)$$

$$\forall\, x \in E(\nu_1) \qquad \hat{\alpha}'(x) = (\alpha'_1(x), 1)$$

Pour $\hat{\varepsilon}$ assez petit, $\hat{\alpha}'$ induit une immersion de $B_{\hat{\varepsilon}}(\hat{\nu})$ dans $M \times I$. On prendra $\hat{\varepsilon}$ inférieur à ε et ε_1.

Remarquons alors que les deux immersions β_{ε} et $\beta_{\hat{\varepsilon}}$ sont régulièrement homotopes et que les deux immersions de type ξ $(W, \beta_{\varepsilon|W}, h'_{|W})$ et $(W, \beta_{\hat{\varepsilon}|W}, h'_{|W})$ sont cobordantes. Il en est de même pour $(W_1, \beta_{1\varepsilon_1|W_1}, h'_{1|W_1})$ et $(W_1, \beta_{1\hat{\varepsilon}|W_1}, h'_{1|W_1})$.

Désignons par $\hat{\varepsilon}\cdot : B_1(\hat{\nu}) \to B_{\hat{\varepsilon}}(\hat{\nu})$ la multiplication par $\hat{\varepsilon}$. L'application $\hat{\beta} = \hat{\alpha}' \circ \hat{\varepsilon}\cdot$ est une immersion de $B_1(\hat{\nu})$ dans $M \times I$ qui prolonge $\hat{\alpha}$, $\beta_{\hat{\varepsilon}}$ et $\beta_{1\hat{\varepsilon}}$.

Soit $\hat{h}$ l'application de $(B_1(\hat{\nu}), B'_1(\hat{\nu}) \cup S_1(\hat{\nu}))$ dans $T\xi$ induite par $\hat{g}$. On construit alors un couple $(\hat{W}, \hat{B})$ possédant les propriétés suivantes :

$\hat{W}$ est une sous-variété à coins de $B_1(\hat{\nu})$

...

$\hat{B}$ est une variété à bord contenue dans $\partial\hat{W}$ et transversale à $W \cup W_1$

$$\partial \hat{W} = \hat{B} \cup W \cup W_1$$

$$\hat{W} \cup \hat{h}^{-1}(\omega) = B_1(\hat{\nu})$$

Enfin, on construit une application $\hat{h}'$ homotope à $\hat{h}$ et telle que :

$$\hat{h}'(B_1(\hat{\nu}) - \mathring{\hat{W}}) = *$$

$$\hat{h}' \big|_W = h'$$

$$\hat{h}' \big|_{W_1} = h'_1$$

On vérifie alors que $(\hat{W}, \hat{B}, \hat{\beta}_{|\hat{W}}, \hat{h}'_{|\hat{W}})$ réalise un cobordisme entre $(W, \beta_{\hat{\epsilon}|W}, h'_{|W})$ et $(W_1, \beta_{1\hat{\epsilon}|W_1}, h'_{1|W_1})$ et l'application θ est bien définie.

On vérifie immédiatement que θ est compatible avec la structure de monoïde commutatif de $I(\xi, M)$ et de $I(T\xi, M)$.

b) Fonctorialité de θ

Soit (V, α, f) une immersion de type ξ dans M. Soit M_1 une variété différentiable sans bord et φ une application continue propre de M_1 dans M différentiable au-dessus d'un voisinage de $\alpha(V)$ et transversale à $\alpha(V)$ et à $\alpha(\partial V)$.

Soit V_1 le produit fibré de V et de M_1 au-dessus de M. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ V & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

...

On désignera par ν et ν_1 les fibrés normaux de α et α_1. On définit de même les espaces $E(\nu)$, $E(\nu_1)$, $B_\varepsilon(\nu)$, $B'_\varepsilon(\nu)$, $S_\varepsilon(\nu)$. Les espaces $B_\varepsilon(\nu_1)$, $B'_\varepsilon(\nu_1)$, $S_\varepsilon(\nu_1)$ seront définis à l'aide de la structure riemannienne de ν_1 induite par ψ de celle de ν.

On a alors pour ε assez petit, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} B_\varepsilon(\nu_1) & \xrightarrow{\alpha'_1} & M_1 \\ \overline{\psi}_\varepsilon \downarrow & & \downarrow \varphi \\ B_\varepsilon(\nu) & \xrightarrow{\alpha'} & M \end{array}$$

α' et α'_1 sont des immersions qui prolongent α et α_1. Par multiplication par ε, on a :

$$\begin{array}{ccc} B_1(\nu_1) & \xrightarrow{\beta_1} & M_1 \\ \overline{\psi} \downarrow & & \downarrow \varphi \\ B_1(\nu) & \xrightarrow{\beta} & M \end{array}$$

On définit alors W, h et h' comme plus haut pour (V,α,f) et $\theta(V,\alpha,f)$ est représenté par $(W, \beta_{|W}, h'_{|W})$.

On vérifie que $\varphi^* \theta(V,\alpha,f)$ est représenté par :

$$(\overline{\psi}^{-1}(W),\ \beta_{1|\overline{\psi}^{-1}(W)},\ h' \circ \overline{\psi}_{|\overline{\psi}^{-1}(W)})$$

à condition que l'on ait choisi W tel que ∂W soit transversale à $\overline{\psi}$, ce qui ne pose pas de difficulté.

Si l'on avait déterminé l'immersion de $B_1(\nu_1)$ dans M, à l'aide d'une structure riemannienne sur M_1, on aurait obtenu une immersion β'_1 régulièrement homotope à β_1, et, dans la détermination de $\theta(V_1,\alpha_1, f \circ \psi)$, on aurait pu, par choix judicieux, obtenir l'immersion

$$(\overline{\psi}^{-1}(W),\ \beta'_{1|\overline{\psi}^{-1}(W)},\ h' \circ \overline{\psi}_{|\overline{\psi}^{-1}(W)})$$

...

Cette immersion est cobordante à

$$(\overline{\Psi}^{-1}(W), \beta_1 | \overline{\Psi}^{-1}(W), h' \circ \overline{\Psi} | \overline{\Psi}^{-1}(W))$$

et θ est fonctoriel ($\varphi^* \circ \theta = \theta \circ \varphi^*$)

c) Réduction du problème de la bijectivité de θ

Soient BO_q le classifiant des fibrés vectoriels de dimension q et γ_q le fibré vectoriel universel sur BO_q.

Soit u une application de X dans BO_q classifiant le fibré ξ' :

$$\xi' = u^* \gamma_q$$

Soit $\mathcal{C}(I, BO_q)$ l'ensemble des chemins de BO_q muni de la topologie "compacts-ouverts".

On pose :

$$X_1 = \{(x,\gamma) \in X \times \mathcal{C}(I, BO_q) \text{ tels que } u(x) = \gamma(0)\}$$

$$A_1 = X_1 \cap A \times \mathcal{C}(I, BO_q)$$

Soit π l'application de X_1 dans BO_q définie par :

$$\pi((x,\gamma)) = \gamma(1)$$

(X_1, BO_q, π) et (A_1, BO_q, π) sont deux fibrés de Serre.

Soit v l'application de X dans X_1 définie par :

$$v(X) = (x,\ t \to u(x))$$

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & X_1 \\ & \searrow^{u} & \downarrow \pi \\ & & BO_q \end{array}$$

Soient $\xi'_1 = \pi^* \gamma_q$ et $\xi_1 = (\xi'_1, X_1, A_1)$

...

On a alors :

$$\xi' = v^* \xi'_1$$

v induit alors une application fibrée $\bar{v}$ de ξ dans ξ_1. Il est facile de voir que $\bar{v}$ est une équivalence d'homotopie dans $\mathcal{C}_q$, et, dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} I(\xi, M) & \xrightarrow{\theta} & I(T\xi, M) \\ \downarrow I(\bar{v}, M) & & \downarrow I(T\bar{v}, M) \\ I(\xi_1, M) & \xrightarrow{\theta_1} & I(T\xi_1, M) \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes.

Il en résulte que θ est bijectif si et seulement si θ_1 est bijectif.

On pourra donc supposer, quitte à remplacer ξ par ξ_1, qu'il existe une application continue π de X dans BO_q, classifiant ξ', telle que (X, BO_q, π) et (A, BO_q, π) sont des fibrés de Serre. On désignera par $\bar{\pi}$ l'application fibrée de ξ' dans γ_q induite par π. $\bar{\pi}$ est également une application fibrée de ξ dans (γ_q, BO_q, BO_q).

d) Injectivité de θ

Soient a_o et a_1 deux éléments de $I(\xi, M)$ représentés respectivement par les immersions de type ξ : (V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1).

Soit G_q^s la grassmannienne des q-plans de $\mathbb{R}^{q+s}$. G est une variété différentiable plongée dans BO_q. Soit γ_q^s la restriction de γ_q à G_q^s.

Comme V_i (i = 0 ou 1) , est compact et que BO_q est la limite inductive des G_q^s, $\bar{\pi} \circ f_i$ se factorise par un γ_q^s. Comme (X, BO_q, π) et (A, BO_q, π) sont des fibrés de Serre, on peut construire une application fibrée f'_i de $(\nu_i, V_i, \partial V_i)$ dans ξ possédant les propriétés

...

suivantes :

f'_i est homotope à f_i dans $\mathcal{C}_q$.

$\bar{\pi} \circ f'_i$ se factorise par γ_q^s et induit sur les bases une application de classe C^∞ de V_i dans G_q^s .

$\bar{\pi} \circ f'_i$ est compatible avec les structures riemanniennes de ν_i (définie à l'aide de α_i) et de γ_q.

Dans la détermination de $\theta(a_i)$, on définit comme dans le a) les applications g_i, h_i , h'_i et α'_i et les espaces $E(\nu_i)$, $B_\varepsilon(\nu_i)$, $B'_\varepsilon(\nu_i)$, $S_\varepsilon(\nu_i)$ et W_i. On posera :

$$\beta_i = \alpha'_i \circ \varepsilon .$$

Cependant, on aura pris soin de choisir pour ξ la structure riemannienne induite par $\bar{\pi}$ de celle de γ_q, et de prendre comme application g_i, l'application f'_i définie plus haut.

On choisira également W_i et h'_i tels que W_i soit un voisinage de V_i dans $B_1(\nu_i)$ et que h'_i soit égale à h_i au voisinage de V_i.

Enfin, on prendra comme voisinage contractile ω de * dans $T\xi$, l'ensemble des points de $T\xi$ représentés par des vecteurs de ξ qui se projettent sur U ou qui sont de norme supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, U étant un voisinage fermé de A dans X tel que l'inclusion de (X,A) dans (X,U) soit une équivalence d'homotopie.

Supposons que l'on ait $\theta(a_o) = \theta(a_1)$

Les deux immersions de type $T\xi$ dans M : $(W_o, \beta_o|W_o, h'_o|W_o)$ et $(W_1, \beta_1|W_1, h'_1|W_1)$ sont cobordantes. Soit $(\hat{W}, \hat{B}, \hat{\beta}, \hat{h})$ un cobordisme entre ces deux immersions.

Soit U_i un voisinage régulier de W_i dans $\hat{W}$. Si l'on choisit un

...

différormorphisme de U_i sur $W_i \times I$, on en déduit une projection φ_i de U_i sur W_i qui est l'identité sur W_i.

Quitte à remplacer $\hat{h}$ par une application homotope à $\hat{h}$, on supposera que $\hat{h}$ est au voisinage de W_i égal à $h'_i \circ \varphi_i$.

Soient E_X, E_q et E_q^s les complémentaires du point base * respectivement dans les espaces $T\xi'$, $T\gamma_q$ et $T\gamma_q^s$. On désignera par Ω l'image réciproque de ω par l'application canonique de E_X dans $T\xi$. La projection π induit une application π' de E_X sur E_q , et (E_X, E_q, π') est un fibré de Serre.

Choisissons alors un couple $(\overline{W}, \overline{B})$ tel que :

$\overline{W}$ est une sous-variété compacte à coins de $\hat{W}$ de dimension $n+1$.

$\overline{B}$ est une sous-variété compacte à bord de $\hat{W}$ de dimension n transversale à W_o et W_1.

$$\partial \overline{W} = \overline{B} \cup (W_o \cap \overline{W}) \cup (W_1 \cap \overline{W})$$
$$\overline{W} \cup \hat{h}^{-1}(\overset{\circ}{\omega}) = \hat{W}$$
$$\overline{W} \cap \hat{h}^{-1}(*) = \emptyset$$
$$\overline{B} \subset \hat{h}^{-1}(\overset{\circ}{\omega})$$

On posera :

$$\overline{W}_i = W_i \cap \overline{W}$$

L'application $\hat{h} : \hat{W} \to T\xi$ induit une application $\overline{h}$: $(\overline{W}, \overline{B}) \to (E_X, \overset{\circ}{\Omega})$. Comme $\overline{W}$ est compacte, il existe un s' tel que :

$$\pi' \circ \overline{h}(\overline{W}) \subset E_q^{s'}$$

Or, $E_q^{s'}$ est une variété différentiable contenant la sous-variété $G_q^{s'}$. D'après les propriétés de $\hat{h}$ au voisinage de W_i , on

...

vérifie que $\pi' \circ \bar{h}$ est de classe C^∞ au voisinage de $\bar{W}_i$ et est transversale à $G_q^{s'}$ au voisinage de $\bar{W}_i$.

Comme (E_X, E_q, π') est un fibré de Serre, on peut construire une homotopie $\bar{h}_t : \bar{W} \times I \to E_X$ telle que :

$$\bar{h}_o = \bar{h}$$

$$\forall t \in I \quad \bar{h}_t \mid \bar{W}_o \cup \bar{W}_1 = \bar{h} \mid \bar{W}_o \cup \bar{W}_1$$

$$\forall t \in I \quad \bar{h}_t(\bar{B}) \subset \mathring{\Omega}$$

$$\forall t \in I \quad \pi' \circ \bar{h}_t(W) \subset E_q^{s'}$$

$\pi' \circ \bar{h}_1$ est de classe C^∞ et transversale à $G_q^{s'}$

$\pi' \circ \bar{h}_1 \mid \bar{B}$ est transversale à $G_q^{s'}$

Posons alors :

$$\bar{V} = (\pi' \circ \bar{h})^{-1}(G_q^{s'})$$

$$\bar{A} = \bar{V} \cap \bar{B}$$

$$\bar{V}_i = V_i \cap \bar{V}$$

On vérifie que $\bar{V}$ est une sous-variété compacte à coins de $\bar{W}$ de dimension $n-q+1$, que $\bar{A}$ est une sous-variété compacte à bord de $\bar{B}$ de dimension $n-q$ transversale à $\bar{V}_o$ et $\bar{V}_1$, et que le bord de $\bar{V}$ est $\bar{A} \cup \bar{V}_o \cup \bar{V}_1$.

L'immersion $\hat{\beta}$ induit une immersion $\bar{\beta}'$ de $\bar{V}$ dans $M \times I$ dont le fibré normal est le fibré normal $\bar{\nu}$ de la sous-variété $\bar{V}$ de $\bar{W}$. On vérifie que $\bar{\beta}'$ est transversale à $M \times \partial I$ et prolonge les immersions $\alpha_i \mid \bar{V}_i$. On peut alors construire une immersion $\bar{\beta} : \bar{V} \to M \times I$,

...

régulièrement homotope à $\bar{\beta}'$, prolongeant les immersions $\alpha_i|\bar{V}_i$ et normale à $M \times \partial I$. $\bar{\nu}$ est le fibré normal de $\bar{\beta}$.

Par construction de $\bar{V}$, l'application $\bar{h}_1$ induit une application fibrée $\bar{f}$ de $(\bar{\nu}, \bar{V}, \bar{A})$ dans (ξ', X, U) telle que :

$$\bar{f}|_{(\nu_i|\bar{V}_i,\ \bar{V}_i,\ \partial\bar{V}_i)} \circ \varepsilon_i = f_i|_{(\nu_i|\bar{V}_i,\ \bar{V}_i,\ \partial\bar{V}_i)}$$

Il en résulte que les deux immersions de type (ξ', X, U) dans M :

$(\bar{V}_o, \alpha_o|\bar{V}_o, f_o|_{(\nu_o|\bar{V}_o, \bar{V}_o, \partial\bar{V}_o)})$ et $(\bar{V}_1, \alpha_1|\bar{V}_1, f_1|_{(\nu_1|\bar{V}_1, \bar{V}_1, \partial\bar{V}_1)})$ sont cobordantes.

Or, les classes dans $I((\xi', X, U), M)$ de ces deux immersions ne sont autres que les images de a_o et a_1 par l'application de $I(\xi, M)$ dans $I((\xi', X, U), M)$ induite par l'application fibrée $\psi : \xi \to (\xi', X, U)$. Comme l'inclusion de (X, A) dans (X, U) est une équivalence d'homotopie, ψ est une équivalence d'homotopie dans $\mathcal{C}_q$ et induit un isomorphisme de $I(\xi, M)$ sur $I(\xi', X, U), M)$.

Il en résulte que a_o et a_1 sont égaux et par suite, θ est injectif.

e) Surjectivité de θ

Soit b un élément de $I(T\xi, M)$ représenté par l'immersion (W, β, h) de type $T\xi$ dans M.

Choisissons une sous-variété compacte à bord W' de W telle que :

$$\dim W' = n$$
$$W' \cap h^{-1}(*) = \emptyset$$
$$W' \cup h^{-1}(\overset{\circ}{\omega}) = W$$
$$\partial W' \subset h^{-1}(\overset{\circ}{\omega})$$

...

L'application h induit une application $h' : W' \to E_X$ envoyant $\partial W'$ en $\mathring{\Omega}$.

Comme W' est compacte, il existe un nombre s tel que :

$$\pi' \circ h' (W') \subset E_q^s$$

On peut alors trouver une homotopie $h'_t : W' \times I \to E_X$ possédant les propriétés suivantes :

$h'_o = h'$

$\forall t \in I \quad \pi' \circ h'_t (W') \subset E_q^s$

$\pi' \circ h'_1$ est de classe C^∞ et transversale à G_q^s

$\pi' \circ h'_1 | \partial W'$ est transversale à G_q^s

Posons alors :

$$V = (\pi' \circ h'_1)^{-1} (G_q^s)$$

V est une sous-variété à bord de W' de dimension n-q.

L'immersion β induit une immersion α de V dans M, dont le fibré normal ν est le fibré normal de la sous-variété V de M.

Par construction de V, h'_1 induit une application fibrée f de $(\nu, V, \partial V)$ dans (ξ', X, U) et (V, α, f) est une immersion de type (ξ', X, U) dans M.

Soit B un voisinage tubulaire de V dans W'. B est difféomorphe à $B_1(\nu)$. Comme $h'_1(V)$ est contenu dans $\mathring{\Omega}$, il existe une variété à bord W_1 de dimension n, contenue dans B, et telle que $B - W_1$ soit contenue dans $h'^{-1}_1 (\mathring{\Omega})$, à condition de prendre B suffisamment petit.

Soit g l'application canonique de E_X dans $T(\xi', X, U)$. Si λ est un nombre supérieur à 1, la multiplication par le scalaire λ

...

induit une application λ . de $T(\xi', X, U)$ dans lui-même.

Si λ est suffisamment grand, l'application $\lambda \cdot \circ g \circ h'_1|W_1$ induit une application h_λ de $(W_1, \partial W_1)$ dans $(T(\xi', X, U), *)$.

On vérifie alors que (W_1, β, h_λ) représente la classe de cobordisme $\theta(V, \alpha, f)$ et l'image de b par l'application canonique de $I(T\xi, M)$ dans $I(T(\xi', X, U), M)$.

Comme les applications de $I(\xi, M)$ et $I(T\xi, M)$ dans $I((\xi', X, U), M)$ et $I(T(\xi', X, U), M)$ sont des isomorphismes, b appartient à l'image de θ, et θ est surjectif.

2.2. Deuxième théorème d'isomorphisme

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé. Le point base de X sera désigné par *.

Soit (V, α, f) une immersion de type X dans M. Si l'on désigne par u le plongement de M dans $M \times \mathbb{R}$ défini par :

$$u(m) = (m, 0)$$

$u \circ \alpha$ est une immersion de V dans $M \times \mathbb{R}$ dont le fibré normal ν est un fibré de dimension 1 trivial et même trivialisé.

Désignons par θ_X le fibré vectoriel de dimension 1, trivial sur la paire $(X, *)$. On en déduit une application fibrée f' de $(\nu, V, \partial V)$ dans θ_X, et $(V, u \circ \alpha, f')$ est une immersion de type θ_X dans $M \times \mathbb{R}$. On posera :

$$(V, u \circ \alpha, f') = \sigma(V, \alpha, f)$$

On vérifie aisément que σ induit un homomorphisme (toujours noté σ) de $I(X, M)$ dans $I(\theta_X, M \times \mathbb{R})$, et que cet homomorphisme est fonctoriel en X et en M.

...

Théorème 2

Si X est un espace connexe, l'homomorphisme σ est un isomorphisme.

a) Injectivité de σ

Soient a_o et a_1 deux éléments de $I(X,M)$ représentés respectivement par les immersions (V_o,α_o, f_o) et (V_1,α_1,f_1).

Supposons que l'on ait :

$$\sigma(a_o) = \sigma(a_1)$$

Les deux immersions de type θ_X dans $M \times \mathbb{R}$: $\sigma(V_o,\alpha_o,f_o)$ et $\sigma(V_1,\alpha_1,f_1)$ sont donc cobordantes.

Soit (W,B,β,g) un cobordisme entre $\sigma(V_o,\alpha_o,f_o)$ et $\sigma(V_1,\alpha_1,f_1)$. On désignera par $\bar{g}$ l'application induite par g de (W,B) dans $(X,*)$.

Soit ν le fibré normal de β. Par g, on déduit une trivialisation de ν. En fait, la donnée de g est équivalente à la donnée d'une application de (W,B) dans $(X,*)$ et d'une trivialisation de ν.

Soit F une partie finie de $\mathring{W}$ qui rencontre toute composante connexe de W.

Comme X est connexe, il existe une homotopie $\bar{g}_t : (W,B) \times I \to (X,*)$ telle que :

$\bar{g}_o = \bar{g}$

$\forall t \in I$ $\bar{g}_t$ est égal à g au voisinage de $V_o \cup V_1$

$\bar{g}_1^{-1}$ (*) est un voisinage de F.

Choisissons une sous-variété compacte W' de dimension $n+1$ de W possédant les propriétés suivantes :

...

$\partial W \subset \partial W'$

$\partial W' - \partial W$ est une variété compacte sans bord

$F \cap W' = \emptyset$

$\bar{g}_1^{-1}(*) \cup W' = W$

Soit g_1 l'application fibrée induite par $\bar{g}_1$ et la trivialisation de ν. On désignera par B' la variété $B \cup (\partial W' - \partial W)$. On vérifie alors que $(W', B', \beta_{|W'}, g_{1|\nu_{|W'}})$ est un cobordisme entre $\sigma(V_o, \alpha_o, f_o)$ et $\sigma(V_1, \alpha_1, f_1)$ et que $(W', V_o \cup V_1)$ est de dimension homologique strictement inférieure à $n+1$.

On posera :

$\nu' = \nu_{|W'}$

$\beta' = \beta_{|W'}$

$g' = g_{1|\nu'}$

On désignera également par p la projection de $M \times \mathbb{R}$ sur M, et par β'' l'application $p \circ \beta'$.

Comme β' est normal à $M \times \mathbb{R} \times \partial I$, on vérifie que β' et $u \circ \beta''$ sont tangents en $V_o \cup V_1$.

Désignons par $I_{\beta''}(M \times I)$ l'espace des immersions de W' dans $M \times I$ tangentes en $V_o \cup V_1$ à β'', par $I_{\beta'}(M \times \mathbb{R} \times I)$ l'espace des immersions de W' dans $M \times \mathbb{R} \times I$ tangentes en $V_o \cup V_1$ à β' et munies d'une trivialisation du fibré normal. Ces espaces sont munis de leur topologie habituelle.

Soit $\mathrm{Max}_{\beta''}(\tau W', \tau(M \times I))$ l'espace des applications fibrées maximales du fibré tangent de W' dans le fibré tangent de $M \times I$, égales à $d\beta''$ au-dessus de $V_o \cup V_1$.

...

Soit θ un fibré vectoriel de dimension 1 sur W' muni d'une trivialisation. On désignera par $\mathrm{Max}_{\beta'}(\tau W' \oplus \theta, \tau(M \times \mathbb{R} \times I))$ l'espace des applications fibrées maximales du fibré tangent stabilisé de W' dans le fibré tangent de $M \times \mathbb{R} \times I$, égales à $d\beta'$ sur $\tau W'|_{V_o \cup V_1}$ et compatibles, au-dessus de $V_o \cup V_1$, avec la trivialisation de θ et la trivialisation du sous-fibré de $\tau(M \times \mathbb{R} \times I)$ formé des vecteurs tangents à $\mathbb{R}$ (fibré sur $M \times \mathbb{R} \times I$).

Soit θ' un fibré vectoriel de dimension 1 sur $M \times I$ muni d'une trivialisation. La projection de $M \times \mathbb{R} \times I$ sur $M \times I$ induit une application fibrée maximale de $\tau(M \times \mathbb{R} \times I)$ sur $\tau(M \times I) \oplus \theta'$.

On désignera par $\mathrm{Max}_{\beta''}(\tau W' \oplus \theta, \tau(M \times I) \oplus \theta')$ l'espace des applications fibrées maximales de $\tau W' \oplus \theta$ dans $\tau(M \times I) \oplus \theta'$ égales au stabilisé de $d\beta''$ au-dessus de $V_o \cup V_1$.

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
I_{\beta'}(M \times \mathbb{R} \times I) & \xrightarrow{d'} & \mathrm{Max}_{\beta'}(\tau W' \oplus \theta, \tau(M \times \mathbb{R} \times I)) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathrm{Max}_{\beta''}(\tau W' \oplus \theta, \tau(M \times I) \oplus \theta') \\
\lambda \uparrow & & \mu \uparrow & \nearrow_{\nu} & \\
I_{\beta''}(M \times I) & \xrightarrow{d''} & \mathrm{Max}_{\beta''}(\tau W', \tau(M \times I)) & &
\end{array}$$

d' et d'' sont induites par les différentielles ; λ est induite par l'application $v : M \times I \to M \times \mathbb{R} \times I$ définie par :

$$v(m, t) = (m, 0, t)$$

μ est induite par l'application v et par stabilisation. ϵ est induite par la projection de $\tau(M \times \mathbb{R} \times I)$ sur $\tau(M \times I) \oplus \theta'$. ν est la stabilisation. On vérifie que ν est un plongement.

Soit α' un élément de $I_{\beta''}(M \times I)$. On vérifie aisément que $(W', B', \alpha', \overline{g_1}_{|W'})$ est un cobordisme entre (V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1). Pour montrer l'égalité de a_o et de a_1, il suffit donc de montrer que $I_{\beta'}(M \times I)$ est non vide. Pour cela, nous montrerons que $\pi_o(\lambda)$ est surjectif.

Comme $(W', V_o \cup V_1)$ est de dimension homologique strictement inférieure à $n+1$, on en déduit, par le théorème de classification des immersions de Smale, que d' et d" sont des équivalences d'homotopie faibles. On vérifie aisément que ϵ est une équivalence d'homotopie. Il en résulte que la surjectivité de $\pi_o(\lambda)$ est équivalente à la surjectivité de $\pi_o(\nu)$.

Pour montrer que $\pi_o(\nu)$ est surjectif, nous utiliserons les notations suivantes :

Soit h une application continue de W' dans $M \times I$ égale à β'' sur $V_o \cup V_1$. On désignera par $A(h)$ (resp. $A'(h)$) l'ensemble des applications fibrées de $\mathrm{Max}_{\beta''}(\tau W', \tau(M \times I))$ (resp. $\mathrm{Max}_{\beta''}(\tau W' \oplus \theta, \tau(M \times I) \oplus \theta')$) qui sont fibrées au-dessus de h.

Si x est un élément de W', on désignera par $\tau_x W'$ (resp. $\tau_{h(x)}(M \times I)$) l'espace tangent en x (resp. en $h(x)$) à W' (resp. $M \times I$).

On désignera par $E(h)$ (resp. $E'(h)$ l'ensemble des couples (x, φ), où x est un élément de W' et φ une application linéaire bijective de $\tau_x(W')$ sur $\tau_{h(x)}(M \times I)$ (resp. de $\tau_x(W') \oplus \mathbb{R}$ sur $\tau_{h(x)}(M \times I) \oplus \mathbb{R}$).

On identifiera $E(h)$ à un sous-espace de $E'(h)$ par l'application : $(x, \varphi) \to (x, \varphi \oplus \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$.

...

Soit π' l'application de $E'(h)$ sur W' définie par :

$$\pi'(x, \varphi) = x$$

On posera : $\pi = \pi' | E(h)$

$E(h)$ et $E'(h)$ sont munis chacun d'une structure canonique d'espace topologique telle que $(E(h), W', \pi)$ et $(E'(h), W', \pi')$ sont des fibrés localement triviaux de fibres GL_{n+1} et GL_{n+2}. On vérifie alors que $A(h)$ et $A'(h)$ s'identifient aux sections de $(E(h), W', \pi)$ et $(E'(h), W', \pi')$ égales à $d\beta''$ sur $V_o \cup V_1$.

Or, (GL_{n+2}, GL_{n+1}) est n-connexe et $(W', V_o \cup V_1)$ est de dimension cohomologique inférieure ou égale à n. Il en résulte que toute section de $(E'(h), W', \pi')$ égale à $d\beta''$ sur $V_o \cup V_1$ est homotope (par une homotopie constante sur $V_o \cup V_1$) à une section de $(E(h), W', \pi)$ et que, par conséquent, ν induit une application surjective de $\pi_o(A(h))$ sur $\pi_o(A'(h))$. $\pi_o(\nu)$, et par conséquent, $\pi_o(\lambda)$, sont donc surjectifs.

Comme $I_{\beta'}(M \times \mathbb{R} \times I)$ contient β', $I_{\beta'}(M \times \mathbb{R} \times I)$ est non vide. On en déduit que $I_{\beta''}(M \times I)$ est non vide et que a_o et a_1 sont égaux.

L'application σ est donc injective.

b) Surjectivité de σ

Soit (W, β, g) une immersion de type θ_X dans $M \times \mathbb{R}$ représentant l'élément b de $I(\theta_X, M \times \mathbb{R})$.

Soit F une partie finie de $\mathring{W}$ qui rencontre toute composante connexe de W. Si l'on désigne par $\bar{g}$ l'application de $(W, \partial W)$ dans $(X, *)$ induite par g, on peut trouver une homotopie

...

$\bar{g}_t : (W, \partial W) \times I \to (X, *)$ telle que :

$$\bar{g}_o = \bar{g}$$

$\bar{g}_1^{-1}(*)$ est un voisinage de F

Choisissons une sous-variété compacte à bord V de W de dimension n telle que :

$$F \cap V = \emptyset$$

$$g_1^{-1}(*) \cup V = W$$

Soit g_1 l'application fibrée induite par $\bar{g}_1$ et la trivialisation du fibré normal ν de β donnée par g. On vérifie que g_1 est homotope dans $\mathcal{C}_1$ à g et que le triplet $(V, \beta_{|V}, g_{1|\nu_{|V}})$ est une immersion de type θ_X dans $M \times \mathbb{R}$ représentant l'élément b de $I(\theta_X, M \times \mathbb{R})$. D'autre part, V n'a pas de composante connexe sans bord.

On posera :

$$\nu' = \nu_{|V}$$

$$\beta' = \nu_{|V}$$

$$g' = g_{1|\nu'}$$

Désignons par $I(M)$ l'espace des immersions de V dans M, et par $I(M \times \mathbb{R})$ l'espace des immersions de V dans $M \times \mathbb{R}$ munies d'une trivialisation du fibré normal.

Soit $\mathrm{Max}(\tau V, \tau M)$ l'espace des applications fibrées maximales du fibré tangent de V dans le fibré tangent de M.

Soit θ (resp. θ') un fibré vectoriel de dimension 1 sur V (resp. sur M) muni d'une trivialisation. On désignera par $\mathrm{Max}(\tau V \oplus \theta, \tau(M \times \mathbb{R}))$ l'espace des applications fibrées maximales du fibré tangent de V stabilisé par θ dans le fibré tangent de

$M \times \mathbb{R}$ et par $\mathrm{Max}(\tau V \oplus \theta , \tau M \oplus \theta')$ l'espace des applications fibrées maximales du fibré tangent de V stabilisé par θ dans le fibré tangent de M stabilisé par θ'.

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} I(M\times\mathbb{R}) & \xrightarrow{d'} & \mathrm{Max}(\tau V\oplus\theta, \tau(M\times\mathbb{R})) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathrm{Max}(\tau V\oplus\theta, \tau M\oplus\theta') \\ \uparrow \lambda & & \uparrow \mu & \nearrow \nu & \\ I(M) & \xrightarrow{d''} & \mathrm{Maw}(\tau V, \tau M) & & \end{array}$$

d et d'' sont induites par les différentielles ; λ est induite par le plongement u de M dans $M \times \mathbb{R}$; μ est induite par u et par stabilisation ; ϵ est induite par la projection de $M \times \mathbb{R}$ sur M ; ν est la stabilisation.

Nous allons montrer que $\pi_o(\lambda)$ est surjectif.

Comme V est de dimension homologique strictement inférieure à n, on en déduit, par le théorème de Smale, que d' et d'' sont des équivalences d'homotopie faibles. On vérifie que ϵ est également une équivalence d'homotopie. Ainsi, la surjectivité de $\pi_o(\lambda)$ est équivalente à la surjectivité de $\pi_o(\nu)$.

Soit h une application continue de V dans M. On désignera par A (h) l'ensemble des applications de $\mathrm{Max}(\tau V, \tau M)$ fibrées au-dessus de h, et par A' (h) l'ensemble des applications de $\mathrm{Max}(\tau V \oplus \theta, \tau M \oplus \theta')$ fibrées au-dessus de h.

Si x est un élément de V, on désignera par $\tau_x V$ l'espace tangent en x à V et par $\tau_{h(x)} M$ l'espace tangent en h(x) à M. On désignera par E (h) (resp. E' (h)) l'ensemble des couples (x, φ), où x est un élément de V et φ une application linéaire bijective de $\tau_x V$

...

sur $\tau_{h(x)} M$ (resp. $\tau_x V \oplus \mathbb{R}$ sur $\tau_{h(x)} M \oplus \mathbb{R}$). On identifiera $E(h)$ à un sous-espace de $E'(h)$ par l'application : $(x,\varphi) \to (x, \varphi \oplus Id_{\mathbb{R}})$.

Soit π' l'application de $E'(h)$ sur V définie par :

$$\pi'(x, \varphi) = x$$

On posera :

$$\pi = \pi'|_{E(h)}$$

$E(h)$ et $E'(h)$ sont munis de structures canoniques d'espaces topologiques telles que $(E(h), V, \pi)$ et $(E'(h), V, \pi')$ soient des fibrés localement triviaux de fibre GL_n et GL_{n+1}, et $A(h)$ et $A'(h)$ s'identifient aux sections de ces fibrés.

Or, (GL_{n+1}, GL_n) est $(n-1)$-connexe et V est de dimension homologique inférieure ou égale à $n-1$. Il en résulte que toute section de $(E'(h), V, \pi')$ est homotope à une section de $(E(h), V, \pi)$ et ν induit une application surjective de $\pi_o(A(h))$ sur $\pi_o(A'(h))$.

On en déduit que $\pi_o(\nu)$ et $\pi_o(\lambda)$ sont surjectifs.

L'immersion β' de $I(M \times \mathbb{R})$ est donc régulièrement homotope à une immersion $\lambda(\alpha)$, α étant une immersion de $I(M)$, et la trivialisation du fibré normal de $\lambda(\alpha)$ induite par u étant égale à celle induite par g'. Le triplet $(V, \lambda(\alpha), g')$ est alors une immersion de type θ_X dans $M \times \mathbb{R}$ qui représente b, et $(V, \lambda(\alpha), g')$ est égal à $\sigma(V, \alpha, g_{1|V})$. L'application σ est donc surjective.

§ 3 - Le classifiant $\wedge X$.

Dans ce paragraphe, nous allons construire un espace topologique pointé $\wedge X$ qui sera un classifiant du foncteur $I(X, ?)$ au sens suivant :

...

Il existe un isomorphisme fonctoriel de $I(X,M)$ sur $[\hat{M},\wedge X]^{\cdot}$, $[\hat{M},\wedge X]^{\cdot}$ étant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées de $\hat{M}$, compactifié d'Alexandrov de M pointé par le point à l'infini, dans $\wedge X$.

3.1. Définition de l'espace $\wedge X$.

Soit X un espace topologique séparé pointé, de point base *. On désignera par Ω l'espace produit $X \times \mathbb{R}^{\infty}$. Ω est un espace topologique pointé par le point $\omega = (*,0)$.

L'application de Ω^n dans Ω^{n+1} qui à $(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ associe $(\omega_1,\ldots,\omega_n,\omega)$ permet d'identifier Ω^n à un sous-espace de Ω^{n+1}. On désignera par Ω^{∞} la limite inductive des espaces Ω^n. Ω^{∞} est un espace pointé.

Soient (x_1,t_1) et (x_2,t_2) deux éléments de Ω. On dira que (x_1,t_1) et (x_2,t_2) sont étrangers si l'on a l'une des trois conditions suivantes :

i) $t_1 \neq t_2$

ii) $x_1 = *$

iii) $x_2 = *$

Si i est un entier positif, on désignera par p_i l'application de Ω^{∞} sur Ω, projection de Ω^{∞} sur le i-ème facteur de Ω^{∞}.

Soient i et j deux entiers positifs distincts. On désignera par $E_{ij}(X)$ le sous-espace de Ω^{∞}, ensemble des éléments u de Ω^{∞} tels que $p_i(u)$ et $p_j(u)$ soient étrangers, et par $E(X)$ l'intersection des sous-espaces $E_{ij}(X)$ de Ω^{∞}. On notera $E^n(X)$ l'espace $E(X) \cap \Omega^n$

...

et $E_n(X)$ le sous-espace de Ω^∞ défini par :

$$\forall u \in \Omega^\infty \quad u \in E_n(X) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \in E(X) \\ \text{et} \\ \forall i > n \quad p_i(u) \in \{*\} \times \mathbb{R}^\infty \end{cases}$$

Soient S (n) le groupe symétrique de degré n, et S (∞) le groupe symétrique infini, limite inductive des groupes S (n).

Par substitution des facteurs, S (∞) opère sur Ω^∞ et sur E (X). On désignera par $\wedge X$ l'espace quotient $E(X)/S(\infty)$, par π la projection de E (X) sur $\wedge X$, par $\wedge^n(X)$ l'espace $\pi(E^n(X))$ et par $\wedge_n X$ l'espace $\pi(E_n(X))$.

On vérifie que $\wedge^n(X)$ est isomorphe à $E^n(X)/S(n)$, et que $\wedge X$ est la limite inductive des sous-espaces $\wedge^n(X)$ ainsi que des sous-espaces $\wedge_n(X)$.

Soit Y un autre espace topologique pointé. Si f est une application continue pointée de X dans Y (i.e. f envoie le point base de X sur le point base de Y), on vérifie que f induit une application continue pointée de $\wedge X$ dans $\wedge Y$ qui envoie $\wedge^n X$ en $\wedge^n Y$ et $\wedge_n X$ en $\wedge_n Y$. Il en résulte que $\wedge$, $\wedge^n$ et $\wedge_n$ sont des foncteurs de la catégorie des espaces topologiques pointés dans elle-même.

3.2. L'"immersion" universelle sur $\wedge X$.

On désignera par S' (∞), le sous-groupe de S (∞), formé des substitutions laissant fixe l'élément 1 de N*, par $\widetilde{\wedge X}$, l'espace quotient $E(X)/S'(\infty)$, par $\widetilde{\pi}$ la projection de E (X) sur $\widetilde{\wedge X}$, et par γ la projection de $\widetilde{\wedge X}$ sur $\wedge X$.

...

Soit $u = (x_1,t_1 ; x_2,t_2 ; \ldots ; x_p,t_p)$ un élément de $E(X)$. On pose : $f'(u) = x_1$.

Cette application est compatible avec $S'(\infty)$ et induit une application $\tilde{f}$ de $\tilde{\wedge} X$ dans X. On désignera par $\partial \tilde{\wedge} X$ le sous-espace $\tilde{f}^{-1}$ (*) de $\tilde{\wedge} X$.

Proposition 2

γ est une application ouverte et propre, et $\gamma_{|\tilde{\wedge X} - \partial\tilde{\wedge X}}$ est localement un homéomorphisme (i.e. tout point y de $\tilde{\wedge X} - \partial\tilde{\wedge X}$ possède un voisinage U tel que $\gamma_{|U}$ soit un homéomorphisme de U sur $\gamma_{|U}$, et $\gamma_{|\tilde{\wedge X} - \partial\tilde{\wedge X}}$ est ouverte).

Soit U un ouvert de $\tilde{\wedge X}$. On vérifie que $\pi^{-1}\gamma(U)$ est l'union pour toutes les substitutions σ de $S(\infty)$ de $\sigma\tilde{\pi}^{-1}(U)$. Comme $\tilde{\pi}$ est continue, $\pi^{-1}\gamma(U)$ est ouvert, et comme la topologie de $\wedge X$ est la topologie finale de π, $\gamma(U)$ est ouvert. γ est donc ouverte.

Soit K un compact de $\wedge X$. Comme $\wedge X$ est la limite inductive des $\wedge^n X$, K est contenu dans un $\wedge^{n-1} X$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de $\pi^{-1}(K) \cap E^n(X)$, $\pi(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre de K qui converge vers un élément y de K. Soit x un élément de $E^n(X)$ représentant y. On désignera par $\{x_1,x_2,\ldots x_p\}$ l'orbite de x sous l'action du groupe $S(n)$, et par G_i $(1 \leq i \leq p)$ l'ensemble des substitutions σ de $S(n)$ telles que $x = \sigma x_i$.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des voisinages ouverts disjoints de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dans $E^n(X)$. On pose :

$$u = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \left(\bigcap_{\sigma \in G_i} \sigma u_i \right)$$

...

Choisissons un élément σ_i de G_i, et désignons par v_i l'ouvert $\sigma_i^{-1} u$. On vérifie que $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont des voisinages ouverts disjoints de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et que $v_1 \cup v_2 \cup \ldots \cup v_p$ est stable par S (n). Il en résulte que $v_1 \cup v_2 \cup \ldots \cup v_p$ est égal à $\pi^{-1}(\pi u)$. Comme πu est un voisinage de y dans $\wedge^n X$, $v_1 \cup v_2 \cup \ldots \cup v_p$ appartient à $\mathcal{U}$, il existe un élément i de $\{1, \ldots, p\}$ tel que v_i appartienne à $\mathcal{U}$.

On montre alors que $\mathcal{U}$ converge vers x_i et que $\pi^{-1}(K) \cap E^n(X)$ est compact. Or, on vérifie aisément que $\gamma^{-1}(\wedge^{n-1} X)$ est contenu dans $\tilde{\pi}(E^n(X))$. Il en résulte que $\gamma^{-1}(K)$ est égal à $\tilde{\pi}(\pi^{-1} K \cap E^n(X))$; $\gamma^{-1}(K)$ est donc compact et γ est propre.

Soit y un élément de $\tilde{\wedge X} - \partial \tilde{\wedge X}$. On peut le représenter par un élément $(x_1, t_1 ; x_2, t_2 ; \ldots ; x_n, t_n)$ tel que :

$$\exists q \geq 1 \quad i \leq q \Rightarrow x_i \neq *$$
$$i > q \Rightarrow x_i = *$$

Comme les éléments (x_i, t_i) de Ω sont étrangers à deux, on a :

$$2 \leq i \leq q \quad t_i \neq t_1$$

Choisissons alors deux ouverts u et u' de $\mathbb{R}^\infty$ tels que :

$$u \cap u' = \emptyset$$
$$t_1 \in u$$
$$2 \leq i \leq q \Rightarrow t_i \in u'$$

Choisissons également deux ouverts v et v' de X tels que :

$$v \cap v' = \emptyset$$
$$x_1 \in v$$
$$* \in v'$$

...

Soit alors U' l'ensemble des éléments

$(x'_1,t'_1 ; x'_2,t'_2 ; \ldots ; x'_p, t'_p)$ de E (X) tels que :

$$x'_1 \in v$$
$$i > q \Rightarrow x'_i \in v'$$
$$t'_1 \in u$$
$$2 \leq i \leq q \Rightarrow t'_i \in u'$$

Comme la topologie de $\wedge\tilde{X}$ est la topologie finale de $\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}$ est ouverte et $\tilde{\pi}$ (U') est un ouvert de $\wedge\tilde{X}$ car U' est ouvert. Soit $U = \tilde{\pi}$ (U'). U est un voisinage de y.

Montrons que $\gamma_{|U}$ est injectif.

Soient y' et y" deux éléments de U tels que $\gamma(y') = \gamma(y")$. y' et y" ont dans U' des représentants :

$$z' = (x'_1,t'_1 ; x'_2,t'_2 ; \ldots ; x'_p,t'_p)$$
$$z" = (x"_1,t"_1 ; x"_2,t"_2 ; \ldots ; x"_p,t"_p)$$

avec :

$$x'_1 \in v \qquad x"_1 \in v$$
$$i > q \Rightarrow x'_i \in v' \qquad x"_i \in v'$$
$$t'_1 \in u \qquad t"_1 \in u$$
$$2 \leq i \leq q \Rightarrow t'_i \in u' \qquad t"_i \in u'$$

Or, $\gamma(y')$ et $\gamma(y")$ sont égaux ; il existe donc une substitution σ telle que :

$$\sigma \cdot z" = z'$$

et l'on a :

$$x"_i = x'_{\sigma^{-1}(i)}$$

$$t"_i = t'_{\sigma^{-1}(i)}$$

...

Comme x''_1 appartient à v, et que pour $i > q$, x'_i appartient à v', il est nécessaire que $\sigma^{-1}(1)$ soit inférieur ou égal à q.

Si $\sigma^{-1}(1)$ était différent de 1, $t'_{\sigma^{-1}(1)}$ serait contenu dans u' et t''_1 également, ce qui est absurde.

$\sigma^{-1}(1)$ est donc égal à 1 et $\sigma \in S'(\infty)$. Il en résulte que y' et y" sont égaux.

On en déduit ainsi la bijectivité de $\gamma_{|U}$ sur $\gamma(U)$. Comme γ est ouverte, $\gamma_{|U}$ est un homéomorphisme de U sur $\gamma(U)$.

Ainsi, γ est une sorte d'immersion propre de $\wedge\tilde{X}$ dans $\wedge X$, à ceci près, évidemment, que $\wedge\tilde{X}$ et $\wedge X$ ne sont pas des variétés. γ est en fait l'"immersion" universelle sur $\wedge X$, qui permettra d'associer à toute variété M munie d'une application continue de $\hat{M}$ dans $\wedge X$, une immersion d'une variété V dans M.

3.3. L'isomorphisme de classification $\varepsilon : I(X,M) \to [\hat{M}, \wedge X]^{\cdot}$

a) Préliminaires.

Soient A et B deux variétés différentiables, éventuellement à coins, de même dimension. On supposera A compacte.

Soient α, f et λ trois applications continues de A dans, respectivement, B, X et $\mathbb{R}^\infty$, possédant les propriétés suivantes :

α est une immersion

si l'on désigne par C l'adhérence dans A de $\partial A - \alpha^{-1}(\partial B)$, $f^{-1}(*)$ est un voisinage de C.

λ est nulle sur C.

pour tout b de B, λ est injective sur $\alpha^{-1}(b) \cap A - f^{-1}(*)$.

On peut alors définir l'application φ de B dans $\wedge X$ de la

...

façon suivante :

si b n'appartient pas à $\alpha(A)$, $\varphi(b)$ est égal au point base de $\wedge X$.

si b appartient à $\alpha(A)$, $\alpha^{-1}(b)$ est un ensemble fini non vide $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, et $\varphi(b)$ est l'élément de $\wedge X$ représenté dans $E(X)$ par : $(f(a_1), \lambda(a_1); f(a_2), \lambda(a_2); \ldots; f(a_p), \lambda(a_p))$.

Lemme

φ est une application continue.

Comme φ est évidemment continue en tout point de B n'appartenant pas à $\alpha(A)$, il suffit de démontrer la continuité de φ en tout point de $\alpha(A)$.

Soit b un élément de $\alpha(A)$. Désignons par $\{a_1, \ldots, a_p\}$ l'ensemble $\alpha^{-1}(b)$, et choisissons pour tout i, un voisinage ouvert U_i de a_i, tel que la restriction de α à U_i soit un plongement, et que les U_i soient deux à deux disjoints. Soit K le complémentaire de l'union des U_i. K est compact et $\alpha(K)$ est fermé. On désignera par V l'ouvert $B - \alpha(K)$. Par construction, l'ouvert $U = \alpha^{-1}V$ est contenu dans l'union des U_i.

Soit U' l'espace topologique $V \times \{1,2,\ldots,p\}$. On désignera par β la projection de U' sur V, et par u, l'application de U dans U' définie par :

$$a \in U \cap U_i \Rightarrow u(a) = (\alpha(a), i)$$

On définira également les applications g de U' dans X et μ de U' dans $\mathbb{R}^\infty$ de la façon suivante :

...

si a' appartient à u (U) , g (a') est égal à $f \circ u^{-1}(a')$, et $\mu(a')$ est égal à $\lambda \circ u^{-1}(a')$.

si a' n'appartient pas à u (U) , g (a') est égal au point base *de X, et λ (a') est nul.

Ces définitions ont bien un sens parce que u est un plongement. On vérifie que g et λ sont continues.

Soit ψ l'application de V dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)^p$ définie par :

$$\psi(b) = (g(b,1), \mu(b,1) ; g(b,2), \mu(b,2) ; \ldots ; g(b,p), \mu(b,p))$$

On vérifie que pour tout b de V , les éléments $(g(b,i), \mu(b,i))$ sont étrangers deux à deux, et que ψ induit par passage au quotient une application continue φ' de V dans $\wedge X$.

Or φ' n'est autre que la restriction de φ à V. Comme V est un voisinage de b, φ est continue en b, et par suite, φ est continue.

Soit $\hat{B}$ le compactifié d'Alexandrov de B, pointé par le point à l'infini de B. (Si B est compact, $\hat{B}$ est l'union disjointe de B et d'un point, appelé point à l'infini). Par construction, φ induit une application continue pointée de $\hat{B}$ dans $\wedge X$. Cette application sera notée $\varphi(\alpha, f, \lambda)$.

Nous allons maintenant construire une application $\tilde{\varphi}$ de A dans $\tilde{\wedge X}$ possédant les propriétés suivantes :

$$\tilde{\varphi}(C) \subset \partial \tilde{\wedge X}$$

$$\tilde{f} \circ \tilde{\varphi} = f$$

$$\gamma \circ \tilde{\varphi} = \varphi(\alpha, f, \lambda) \circ \alpha$$

...

Soit a un point de A. Désignons par $\{a, a_2; \ldots, a_p\}$ l'ensemble $\alpha^{-1}(\alpha a)$. $\tilde{\varphi}(a)$ est alors, par définition, égal à l'élément de $\tilde{\wedge X}$ représenté dans E (X) par :

$$(f(a), \lambda(a) ; f(a_2), \lambda(a_2) ; \ldots ; f(a_p), \lambda(a_p))$$

Les propriétés de $\tilde{\varphi}$, énoncées ci-dessus, sont immédiatement vérifiées ; il reste à montrer la continuité de $\tilde{\varphi}$.

Soit a un point de A. Désignons par b l'élément $\alpha(a)$, et par $\{a, a_2, \ldots, a_p\}$ l'ensemble $\alpha^{-1}(b)$. On construit comme plus haut, les ouverts U_i, V, U, U' et l'application ψ, et l'on vérifie que l'on a :

$$\tilde{\varphi} \mid U \cap U_1 = \tilde{\pi} \circ \psi \circ \alpha \mid U \cap U_1$$

$\tilde{\varphi}$ est alors continue.

Cette application $\tilde{\varphi}$ sera notée $\tilde{\varphi}(\alpha, f, \lambda)$.

b) Définition de l'application ε

Soient M une variété différentiable sans bord, et X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W. complexe pointé.

Soit a un élément de I (X,M). On peut représenter a par une immersion (V, α, f) telle que $f^{-1}(*)$ soit un voisinage de ∂V, et l'on peut alors construire une application λ de V dans $\mathbb{R}^\infty$, nulle sur ∂V et injective sur l'adhérence dans V de $V - f^{-1}(*)$. $\varphi(\alpha, f, \lambda)$ est alors une application continue pointée de $\hat{M}$ dans $\wedge X$ et définit un élément b de $[\hat{M}, \wedge X]^{\cdot}$.

Nous allons montrer que cet élément b ne dépend pas du choix de (V, α, f) et de λ.

...

En effet, soient (V_1,α_1,f_1) une autre immersion de type X dans M représentant a et telle que $f_1^{-1}(*)$ soit un voisinage de ∂V_1, et λ_1 une application continue de V_1 dans $\mathbb{R}^\infty$, nulle sur ∂V_1 et injective sur l'adhérence dans V_1 de $V_1 - f_1^{-1}(*)$.

Comme (V,α,f) et (V_1,α_1,f_1) représentent le même élément dans $I(X,M)$, il existe un cobordisme (V',A',α',f') entre (V,α,f) et (V_1,α_1,f_1).

Construisons une application g' de (V',A') dans $(X,*)$, homotope à f', égale à f' sur $V \cup V_1$ et telle que $g'^{-1}(*)$ soit un voisinage de A' dans V'.

Choisissons alors une application λ' de V' dans $\mathbb{R}^\infty$ possédant les propriétés suivantes :

λ' est nulle sur A'

$\lambda'|_V = \lambda$

λ' est injective sur l'adhérence dans V' de $V' - g'^{-1}(*)$

$$\overline{\lambda'(V_1 - f^{-1}(*))} \cap \lambda_1\overline{(V_1 - f_1^{-1}(*))} = \emptyset$$

L'application $\varphi(\alpha',g',\lambda')$ est alors une homotopie entre $\varphi(\alpha,f,\lambda)$ et $\varphi(\alpha_1,f_1,\lambda'|_{V_1})$.

Choisissons alors une application λ'_1 de $V_1 \times I$ dans $\mathbb{R}^\infty$ possédant les propriétés suivantes :

λ'_1 est nulle sur $\partial V_1 \times I$

$\lambda'_1|_{V_1 \times \{0\}} = \lambda_1$

$\lambda'_1|_{V_1 \times \{1\}} = \lambda'|_{V_1}$

λ'_1 est injective sur $\overline{(V'_1 - f_1^{-1}(*))}$

Soit p la projection de $V_1 \times I$ sur V_1. On vérifie que

...

$\varphi(\alpha_1 \times Id_I, f \circ p, \lambda'_1)$ est une homotopie entre $\varphi(\alpha_1, f_1, \lambda_1)$ et $\varphi(\alpha_1, f_1, \lambda'|V_1)$.

Les deux applications $\varphi(\alpha, f, \lambda)$ et $\varphi(\alpha_1, f_1, \lambda_1)$ sont donc homotopes, et b ne dépend que de a.

On posera par définition :

$$b = \epsilon(a)$$

c) Fonctorialité de ϵ.

Il est clair que ϵ est fonctoriel en X. Nous allons montrer que ϵ est fonctoriel en M.

Soient M et M' deux variétés différentiables sans bord, et g une application continue propre de M' dans M.

Soit (V, α, f) une immersion de type X dans M représentant l'élément a de $I(X,M)$, et telle que $f^{-1}(*)$ soit un voisinage de ∂V. Choisissons alors une application h de M' dans M, homotope à g, dans une homotopie à support compact, différentiable sur un voisinage de $g^{-1}(\alpha(V))$ et transversale à $\alpha(\partial V)$. (Comme V et M ont même dimension, g est transversale à $\alpha(V)$). Soit V' le produit fibré de M' et de V au-dessus de M. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{\alpha'} & M' \\ k \downarrow & & \downarrow h \\ V & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

Par définition, $(V', \alpha', f \circ k)$ représente $g^*(a)$

D'autre part, si l'on choisit une application λ de V dans $\mathbb{R}^\infty$, nulle sur ∂V et injective sur $V - f^{-1}(*)$, $\varphi(\alpha, f, \lambda)$ représente l'élément $\epsilon(a)$, et $\varphi(\alpha, f, \lambda) \circ h$ représente $g^*(\epsilon(a))$. Or, on vérifie q

...

$\varphi(\alpha,f,\lambda) \circ h$ est égal à $\varphi(\alpha', f \circ k, \lambda \circ k)$. Il reste donc à démontrer que $\varphi(\alpha', f \circ k, \lambda \circ k)$ représente $\epsilon(g^*(a))$.

Comme V' est compact, $\lambda \circ k(V')$ est contenu dans un sous-espace H de $\mathbb{R}^\infty$ de dimension finie. Soit H' un supplémentaire de H. Choisissons une application continue μ de V' dans H', nulle sur $\partial V'$ et injective sur $\overline{V' - (f \circ k)^{-1}(*)}$. Cela est possible car $(f \circ k)^{-1}(*)$ est un voisinage de $\partial V'$.

Soit alors $\lambda' : V' \times I \to \mathbb{R}^\infty$, l'application définie par :

$$\lambda'(v',t) = \lambda \circ k(v') + t\,\mu(v')$$

On vérifie que λ' est nulle sur $\partial V' \times I$ et que pour tout y de $M' \times I$, λ' est injective sur $(\alpha' \times Id_I)^{-1}(y) \cap \overline{V' - (f \circ k)^{-1}(*)} \times I$.

Soit p la projection de $V' \times I$ sur V' : l'application $\varphi(\alpha' \times Id_I, f \circ k \circ p, \lambda')$ est alors une homotopie entre $\varphi(\alpha', f \circ k, \lambda \circ k)$ et $\varphi(\alpha', f \circ k, \lambda \circ k + \mu)$.

Mais, $\lambda \circ k + \mu$ est injective sur $\overline{V' - (f \circ k)^{-1}(*)}$, $\varphi(\alpha', f \circ k, \lambda \circ k + \mu)$ représente donc $\epsilon(g^*(a))$.

On a ainsi montré l'égalité de $\epsilon(g^*(a))$ et de $g^*(\epsilon(a))$. L'application ϵ est donc fonctorielle en M.

d) Injectivité de ϵ.

Soient a_o et a_1 deux éléments de I(X,M) représentés par les immersions (V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1). Quitte à remplacer f_o et f_1 par deux applications homotopes, on supposera que, si i est égal à 0 ou 1, $f_i^{-1}(*)$ est un voisinage de ∂V_i.

Choisissons alors deux applications λ_o et λ_1 de, respectivement, V_o et V_1 dans $\mathbb{R}^\infty$ telles que λ_i soit nulle sur ∂V_i et injective

...

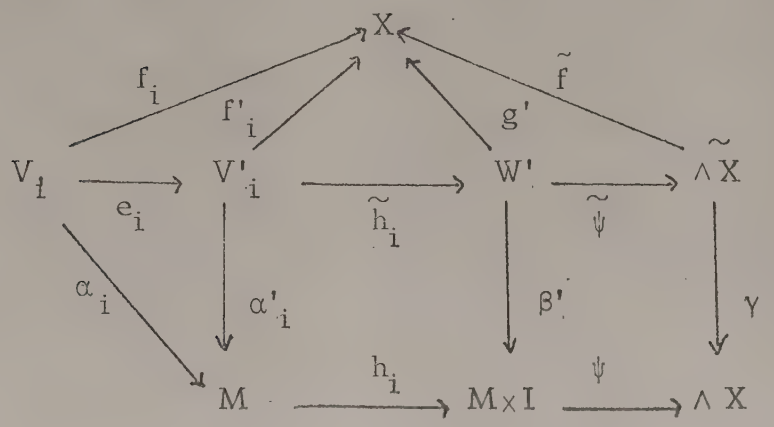
sur $\overline{V_i - f_i^{-1}(*)}$. $\varepsilon(a_i)$ est alors représenté par $\varphi(\alpha_i, f_i, \lambda_i)$

Supposons que $\varepsilon(a_o)$ et $\varepsilon(a_1)$ sont égaux. Il existe alors une application continue ψ de $\widehat{M \times I}$ dans $\wedge X$ telle que :

$$\psi \,|\, \hat{M} \times \{0\} = \varphi(\alpha_o, f_o, \lambda_o)$$

$$\psi \,|\, \hat{M} \times \{1\} = \varphi(\alpha_1, f_1, \lambda_1)$$

Considérons alors le diagramme suivant :



i est égal à 0 ou 1.

W' est le produit fibré de M x I et de $\wedge\tilde{X}$ au-dessus de $\wedge X$.

h_i est l'application : $m \to (m, i)$.

V'_i est le produit fibré de M et de W' au-dessus de M x I (V'_i est aussi le produit fibré de M et de $\wedge\tilde{X}$ au-dessus de $\wedge X$).

e_i est l'application induite par $\alpha_i : V_i \to M$ et par $\tilde{\varphi}(\alpha_i, f_i, \lambda_i)$.

g' est égale à $\tilde{f} \circ \tilde{\psi}$.

f'_i est égale à $g' \circ \tilde{h}_i$.

Désignons par $\partial W'$ et $\partial V'_i$ les espaces $\tilde{\psi}^{-1}(\partial \wedge \tilde{X})$ et $(\tilde{\psi} \circ \tilde{h}_i)^{-1}(\partial \wedge \tilde{X})$.

Comme l'application γ est ouverte et propre, les applications β' et α'_i le sont également. De même, on montre que

...

$\beta' | W' - \partial W'$ et $\alpha'_i | V'_i - \partial V'_i$ sont localement des homéomorphismes et induisent sur $W' - \partial W'$ et $V'_i - \partial V'_i$ des structures de variété différentiable.

D'autre part, l'application e_i envoie $V_i - f_i^{-1}(*)$ dans $V'_i - \partial V'_i$. Nous allons montrer que $e_i | V_i - f_i^{-1}(*)$ est un homéomorphisme de $V_i - f_i^{-1}(*)$ sur $V'_i - \partial V'_i$.

Soit v' un élément de $V'_i - \partial V'_i$. Désignons par m l'image par α'_i de v', et par $(x_1,t_1 ; x_2,t_2 ; \ldots ; x_p,t_p)$ un représentant dans E (X) de $\tilde{\psi} \circ \tilde{h}_i (v')$. $(x_1,t_1 ; x_2,t_2 ; \ldots ; x_p,t_p)$ est un représentant de $\psi \circ h_i (m)$.

Désignons par $\{v_1,v_2,\ldots,v_q\}$ l'ensemble $\alpha_i^{-1}(m)$. $(f_i(v_1), \lambda_i(v_1) ; f_i(v_2), \lambda_i(v_2) ; \ldots ; f_i(v_q), \lambda_i(v_q))$ est alors un représentant dans E (X) de $\psi \circ h_i (m)$, et l'on a, pour un certain élément j de $\{1, 2, \ldots, q\}$:

$$f_i(v_j) = x_1 \qquad \lambda_i(v_j) = t_1$$

Comme x_1 est distinct de $*$, car v' n'appartient pas à $\partial V'_i$, et que les éléments $(f_i(v_1),\lambda_i(v_1)),(f_i(v_2), \lambda_i(v_2)),\ldots,(f_i(v_q),\lambda_i(v_q))$ sont étangers deux à deux, on vérifie que j est unique.
$\tilde{\psi} \circ \tilde{h}_i \circ e_i (v_j)$ est alors représenté par : $(f_i(v_j),\lambda_i(v_j)$; $(f_i(v_1),\lambda_i(v_1) ; \ldots ; f_i(v_{j-1}),\lambda_i(v_{j-1}) ; f_i(v_{j+1}),\lambda_i(v_{j+1}) ; \ldots ; f_i(v_q),\lambda_i(v_q))$ et l'on a :

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{h}_i \circ e_i(v) = \tilde{\psi} \circ \tilde{h}_i(v')$$

Il en résulte que v_j est l'unique élément de $e_i^{-1}(v')$.

L'application $e_i | V_i - f_i^{-1}(*)$ dans $V'_i - \partial V'_i$ est donc bijective.

Comme $\alpha_i | V_i - f_i^{-1}(*)$ et $\alpha'_i | V'_i - \partial V'_i$ sont localement des homéomorphismes $e_i | V_i - f_i^{-1}(*)$ est localement un homéomorphisme.

...

Il en résulte que $e_i|_{V_i - f_i^{-1}(*)}$ est un homéomorphisme de $V_i - f_i^{-1}(*)$ sur $V'_i - \partial V'_i$.

Soit ω un voisinage ouvert contractile de * dans X. Désignons par U l'ouvert $g'^{-1}(\omega)$, et par K le fermé W'-U. Nous allons montrer que K est compact.

L'inclusion de ω dans X induit une inclusion de $\wedge\omega$ dans $\wedge X$. On vérifie que $\wedge\omega$ est un voisinage ouvert du point base de $\wedge X$. $\psi^{-1}(\wedge\omega)$ est donc un voisinage ouvert du point à l'infini de $\widehat{M \times I}$, et $\widehat{M \times I} - \psi^{-1}(\wedge\omega)$ est compact. Or, $\beta'(K)$ est inclus dans $\widehat{M \times I} - \psi^{-1}(\wedge\omega)$ $\beta'(K)$ est donc relativement compact, et comme β' est propre, K est compact.

On peut alors trouver deux variétés différentiables compactes W et B telles que :

$$\dim W = \dim M \times I = \dim (W' - \partial W')$$

$$\dim B = \dim W - 1$$

$$W \subset W' - \partial W'$$

$$K \subset W$$

$$B \subset U$$

$$\partial B = (B \cap \tilde{h}_o(V'_o)) \cup (B \cap \tilde{h}_1(V'_1))$$

B est transversale à $\tilde{h}_o(V'_o)$ et à $\tilde{h}_1(V'_1)$ et $\beta'(B)$ est normal à $M \times \partial I$.

$$\partial W = B \cup (W \cap \tilde{h}_o(V'_o)) \cup (W \cap \tilde{h}_1(V'_1))$$

Choisissons une application g de $(W', \partial W')$ dans $(X, *)$ homotope à g' et telle que $g(U) = *$

On en déduit que $(W, B, \beta'|_W)$ est un cobordisme entre

...

$(W \cap \tilde{h}_o(V'_o), \beta' | W \cap \tilde{h}_o(V'_o), g | W \cap \tilde{h}_o(V'_o))$ et

$(W \cap \tilde{h}_1(V'_1), \beta' | W \cap \tilde{h}_1(V'_1), g | W \cap \tilde{h}_1(V'_1))$.

Désignons alors par $\bar{V}_i$ la variété $(\tilde{h}_i \circ e_i)^{-1}(W)$. L'immersion de type X dans M, $(\bar{V}_i, \alpha_i | \bar{V}_i, g \circ \tilde{h}_i \circ e_i | \bar{V}_i)$, est isomorphe à $(W \cap \tilde{h}_i(V'_i), \beta' | W \cap \tilde{h}_i(V'_i), g | W \cap \tilde{h}_i(V'_i))$, cobordante à $(V_i, \alpha_i, g \circ \tilde{h}_i \circ e_i)$ donc cobordante à (V_i, α_i, f_i). Il en résulte que (V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1) sont cobordantes et que a_o et a_1 sont égaux.

ϵ est donc injective.

e) Surjectivité de ϵ.

Soit (K,k) un C.W.complexe pointé ayant le type d'homotopie de (X,*). Choisissons deux équivalences d'homotopie :

$a : (X,*) \to (K,k)$ et $b : (K,k) \to (X,*)$.

Soient H et H_1 deux sous-complexes de K possédant les propriétés suivantes :

$$k \in \mathring{H}_1$$

$$H_1 \subset \mathring{H}$$

H est contractile.

Désignons par ω et ω_1 les intérieurs de $a^{-1}(H)$ et de $a^{-1}(H_1)$. On a :

$$* \in \omega_1 \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_1 \subset \omega$$

Comme H est contractile, il existe une application $g' : K \times I \to K$ possédant les propriétés suivantes :

$$\forall t \in I \quad g'(k, t) = k$$

$$\forall t \in I, \forall x \in K, \quad t \leq \frac{1}{4} \Rightarrow g'(x,t) = x$$

...

$$\forall x \in H \qquad g'(x, \tfrac{1}{2}) = k$$

$$\forall t \in I, \forall x \in K, \qquad t \geq \tfrac{1}{2} \Rightarrow g'(x,t) = g'(x, \tfrac{1}{2})$$

Soit alors $g_1 : X \times I \to X$ l'application définie par :

$$\forall t \in I, \forall x \in X \qquad g_1(x,t) = b(g'(a(x), t))$$

D'autre part, l'application b o a est homotope à l'identité ; il existe donc une application $g_2 : X \times I \to X$ possédant les propriétés suivantes :

$$\forall t \in I \qquad g_2(*, t) = *$$

$$\forall x \in X \qquad g_2(x, 0) = x$$

$$\forall x \in X \qquad g_2(x, 1) = b \circ a(x)$$

On définit alors l'application $g : X \times I \to X$ par :

$$g(x,t) = \begin{cases} g_2(x, 4t) & 0 \leq t \leq \tfrac{1}{4} \\ g_1(x, t) & \tfrac{1}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On vérifie que g est continue et possède les propriétés suivantes :

$$\forall t \in I \qquad g(*, t) = *$$

$$\forall x \in X \qquad g(x, 0) = x$$

$$\forall t \in I, \forall x \in \overline{\omega} \qquad t \geq \tfrac{1}{2} \Rightarrow g(x, t) = *$$

D'autre part K est normal ; il existe donc une application $k : K \to I$ telle que :

$$\forall x \in H_1 \quad k(x) = 1$$

$$\forall x \in K \quad x \notin H \Rightarrow k(x) = 0$$

Définissons alors l'application $X \times \mathbb{R}^\infty \times I \to \mathbb{R}^\infty$ par :

$$h(x, \lambda, t) = \begin{cases} \lambda & 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\ (1 - (2t - 1)k \circ a(x))\lambda & \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

...

On vérifie que h est continue et possède les propriétés suivantes :

$$\forall t \in I, \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}^{\infty} \qquad x \notin \omega \Rightarrow h(x,\lambda,t) = \lambda$$

$$\forall x \in \omega_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}^{\infty} \qquad h(x,\lambda,1) = 0$$

Soit $F' : (X \times \mathbb{R}^{\infty})^n \times I \to (X \times \mathbb{R}^{\infty})^n$ l'application définie par :

$$F'(x_1,\lambda_1 ; x_2,\lambda_2 ; \ldots ; x_n,\lambda_n ; t) =$$

$$(g(x_1,t), h(x_1,\lambda_1,t) ; g(x_2,t), h(x_2,\lambda_2,t) ; \ldots ; g(x_n,t), h(\lambda_n,t))$$

On vérifie que F' induit une application continue de $E(X) \times I$ dans $E(X)$ compatible avec les actions des groupes $S(\infty)$ et $S'(\infty)$. F' induit donc une application continue $F : \wedge X \times I \to \wedge X$ et une application $\tilde{F} : \tilde{\wedge} X \times I \to \tilde{\wedge} X$ telles que :

$$F \circ (\gamma \times Id_I) = \gamma \circ \tilde{F}$$

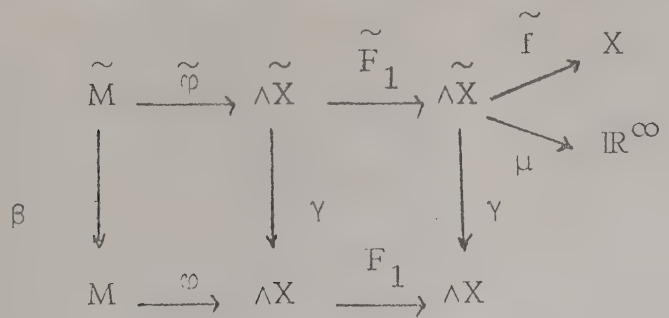
On désignera par F_1 et $\tilde{F}_1$ les applications : $x \to F(x,1)$ et $x \to \tilde{F}(x,1)$. On a :

$$F_1 \circ \gamma = \gamma \circ \tilde{F}_1$$

On vérifie d'autre part que F_1 est homotope à l'identité et envoie $\wedge\omega_1$ au point base de $\wedge X$, et que $\tilde{F}_1$ envoie $\tilde{\wedge}\omega_1$ au point base de $\tilde{\wedge} X$.

Considérons maintenant un élément b de $[\hat{M}, \wedge X]^{\cdot}$ représenté par une application continue pointée $\varphi : \hat{M} \to \wedge X$.

On a alors le diagramme quivant :



...

$\tilde{M}$ est le produit fibré de M et de $\wedge\tilde{X}$ au-dessus de $\wedge X$ (défini par les applications φ et γ).

μ est l'application induite par l'application de E(X) dans $\mathbb{R}^{\infty}$:

$$(x_1,t_1 ; x_2,t_2 ; \ldots ; x_p,t_p) \rightarrow t_1$$

Soit $\partial\tilde{M}$ l'espace $\tilde{\varphi}^{-1}(\partial\wedge\tilde{X})$. On vérifie que β est ouverte et propre, et que $\beta_{|\tilde{M}-\partial\tilde{M}}$ est localement un homéomorphisme.

Soit U_1 l'ouvert $(\tilde{f} \circ \tilde{\varphi})^{-1}(\omega_1)$. Montrons que $\tilde{M} - U_1$ est compact.

Si $\tilde{m}$ est un élément de $\tilde{M} - U_1$, alors $\varphi \circ \beta(\tilde{m})$ n'appartient pas à $\wedge\omega_1$. Or $\wedge\omega_1$ est un voisinage du point base dans $\wedge X$. $\varphi^{-1}(\wedge\omega_1)$ est donc un voisinage de l'infini dans M et $M-\varphi^{-1}(\wedge\omega_1)$ est compact. Comme β est propre, $\tilde{M} - \beta^{-1}(\varphi^{-1}(\wedge\omega_1))$ est compact. Il en résulte que $\tilde{M} - U_1$ est contenu dans un compact. Comme U_1 est ouvert, $\tilde{M} - U_1$ est compact.

Comme $\beta_{|\tilde{M}-\partial\tilde{M}}$ est localement un homéomorphisme, β induit une structure canonique de variété différentiable sur $\tilde{M} - \partial\tilde{M}$. Choisissons alors une variété différentiable compacte à bord V telle que :

$$\dim V = \dim M$$
$$V \subset \tilde{M} - \partial\tilde{M}$$
$$V \cup U_1 = \tilde{M}$$
$$\partial V \subset U_1$$

et posons :

$$\alpha = \beta_{|V}$$
$$f = \tilde{f} \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}_{|V}$$
$$\lambda = \mu \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}_{|V}$$

...

Soit U l'ouvert $(\tilde{f} \circ \tilde{\varphi})^{-1}(\omega)$. On vérifie que :

$$\tilde{f} \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}(U) = *$$

$$x \notin U \Rightarrow \mu \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}(x) = \mu \circ \tilde{\varphi}(x)$$

$$x \in U_1 \Rightarrow \mu \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}(x) = 0$$

On vérifie alors qu'on peut définir $\varphi(\alpha, f, \lambda)$.

Soit m un point de M. Désignons par $\{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \ldots, \tilde{m}_p\}$ l'ensemble $\beta^{-1}(m) \cap (\tilde{M} - \partial\tilde{M})$.

On vérifie aisément que :

$(\tilde{f} \circ \tilde{F}_1 \circ \varphi(\tilde{m}_1), \mu \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}(\tilde{m}_1) ; \ldots ; \tilde{f} \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}(\tilde{m}_p), \mu \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}(\tilde{m}_p))$

est un représentant de $F_1 \circ \varphi(m)$.

Or, si $\tilde{m}_i$ n'appartient pas à V, $\tilde{m}_i$ appartient à U_1 et l'on a :

$$\tilde{f} \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}(\tilde{m}_i) = *$$

$$\mu \circ \tilde{F}_1 \circ \tilde{\varphi}(\tilde{m}_i) = 0$$

Il en résulte que l'on a :

$$F_1 \circ \varphi(m) = \varphi(\alpha, f, \lambda)(m)$$

Comme V est compact, $\lambda(V)$ est contenu dans un sous-espace H de $\mathbb{R}^\infty$ de dimension finie. Soit H' un supplémentaire de H. Choisissons une application continue ν de V dans H' nulle sur ∂V et injective sur $V - V \cap U$.

Soit alors $\lambda' : V \times I \to \mathbb{R}^\infty$, l'application définie par :

$$\lambda'(v, t) = \lambda(v) + t\,\nu(v)$$

On vérifie que λ' est nulle sur ∂V et que pour tout m de M, λ' est injective sur $\alpha^{-1}(m) \cap (V - V \cap U)$. Soit p la projection de

...

$V \times I$ sur V ; l'application $\varphi(\alpha \times Id, f \circ p, \lambda')$ est alors une homotopie entre $\varphi(a,f,\lambda)$ et $\varphi(a,f,\lambda+\nu)$.

Mais, $\lambda+\nu$ est injective sur $\overline{V-f^{-1}(*)}$. $\varphi(\alpha,f,\lambda+\nu)$ représente donc l'image par ε de la classe de cobordisme de l'immersion (V,α,f). Comme $F_1 \circ \varpi$ est homotope à φ, on voit que b appartient à $\varepsilon(I(X,M))$. ε est donc surjective.

3.4. Immersion cobordante ou régulièrement homotope à un plongement

Théorème 3

Soit (V,α,f) une immersion de type ξ dans M représentant la classe a de $I(\xi,M)$. Alors (V,α,f) est cobordante à une immersion (V',α',f') de type ξ dans M, α' étant un plongement, si et seulement si la classe d'homotopie $\varepsilon(\theta(a))$ peut être représentée par une application continue pointée de $\hat{M}$ dans $\wedge_1 T\xi$.

Supposons que a peut être représenté par une immersion (V',α',f') de type ξ dans M, α' étant un plongement. Alors, d'après la construction de θ, $\theta(a)$ peut être représenté par une immersion (W,β,g) de type $T\xi$ dans M, β étant un plongement.

Il en résulte, d'après la définition de ε, que $\varepsilon(\theta(a))$ est représenté par $\varphi(\beta,g',\lambda)$, g' étant une application de W dans X et λ une application de W dans $\mathbb{R}^\infty$. Or, pour tout point m de M, $\beta^{-1}(m)$ a au plus un élément, car β est un plongement. Il en résulte que $\varphi(\beta,g',\lambda)$ est une application de $\hat{M}$ dans $\wedge_1 T\xi$.

Réciproquement, supposons que $\varepsilon(\theta(a))$ peut être représenté par une application φ de $\hat{M}$ dans $\wedge_1 T\xi$. Soit $\tilde{M}$ le produit fibré de M et de $\wedge T\xi$ au-dessus de $\wedge T\xi$. Désignons par β la

...

la projection de $\tilde{M}$ sur M, par $\tilde{\varphi}$ l'application de $\tilde{M}$ dans $\wedge\tilde{T}\xi$ et par $\partial\tilde{M}$ l'espace $\tilde{\varphi}^{-1}(\partial\wedge\tilde{T}\xi)$. Comme l'image de φ est contenue dans $\wedge_1 T\xi$, on vérifie que $\beta_{|\tilde{M}-\partial\tilde{M}}$ est un plongement et que $\theta(a)$ peut être représenté par une immersion (W,β',g) de type $T\xi$ dans M, W étant une sous-variété de $\tilde{M} - \partial\tilde{M}$ et β' la restriction de β à W. a peut alors être représenté par une immersion (V',α',f') de type ξ dans M, V' étant une sous-variété de W et α' la restriction de β' à V'.

(V',α',f') est donc un représentant de a tel que α' est un plongement, et (V',α',f') est cobordante à (V,α,f).

Corollaire.

Soient M une variété différentiable sans bord, V une variété différentiable compacte, et α une immersion de V dans M. On désignera par ν le fibré normal de α, et par a la classe de (V,α,Id_ν) dans $I((\nu,V,\partial V),M)$.

Alors, une condition nécessaire pour que α soit régulièrement homotope à un plongement est que $\epsilon(\theta(a))$ soit représenté par une application continue pointée de $\hat{M}$ dans $\wedge_1 T(\nu,V,\partial V)$.

La démonstration résulte trivialement du fait que si α et β sont deux immersions de V dans M régulièrement homotopes, (V,α,Id_ν) et (V,β,Id_ν) sont cobordantes.

CHAPITRE III

PROPRIETES HOMOTOPIQUES & HOMOLOGIQUES DU FONCTEUR $\wedge$

§ 1 - Structures H-algébriques de $\wedge X$

I.I. La structure de H-espace de $\wedge X$

a) Définition du produit lorsque X est un C.W. complexe pointé.

Soit X un C.W. complexe pointé, de point base $*$.

Nous allons tout d'abord construire une application g continue de X dans $\mathbb{R}^+$ qui ne s'annule qu'au point base.

Procédons par récurrence, et supposons que l'on ait une application g_n définie sur le n-ième squelette X_n de X, dans $\mathbb{R}^+$, telle que $g_n^{-1}(0)$ soit égal à $\{*\}$. Soit σ une cellule de dimension $n+1$ de X ; σ est l'image par une application φ de la boule B de dimension $n+1$. Soit h un prolongement de $g_n \circ \varphi_{|\partial B}$ à B. Choisissons une distance d sur B, et posons :

$$\forall x \in B \qquad h'(x) = d(x, \partial B) + h(x)$$

On vérifie que h' est un prolongement de $g_n \circ \varphi_{|\partial B}$ qui ne s'annule pas sur $B - \partial B$.

En procédant de même pour toutes les cellules de dimension $n+1$ de X, on obtient une application continue g_{n+1} de X_{n+1} dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$g_{n+1}|_{X_n} = g_n \qquad \text{et} \qquad g_{n+1}^{-1}(0) = \{*\}$$

...

Les applications g_n induisent donc une application g continue de X dans $\mathbb{R}^+$ telle que : $g^{-1}(0) = \{*\}$

Soit (e_i), $i \in N$, une base de $\mathbb{R}^\infty$. On définit l'application f de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\infty$ par :

$$f(\Sigma \lambda_i e_i, \lambda) = \lambda e_o + \Sigma \lambda_i e_{i+1}$$

Soit y un élément de $\wedge X$ représenté par l'élément $(x_1,t_1 ; x_2,t_2 ; \ldots ; x_p,t_p)$ de E (X). Soit y' un élément de $\wedge X$ représenté par $(x'_1,t'_1 ; \ldots ; x'_q,t'_q)$. Alors :

$$(x_1, f(t_1, g(x_1)) ; \ldots ; x_p, f(t_p, g(x_p)) ; x'_1, f(t'_1, -g(x'_1)) ; \ldots ; x'_q, f(t'_q, -g(x'_q)))$$

est un élément de E (X) et induit dans $\wedge X$ un élément indépendant du choix des représentants de y et y', et noté y.y'.

Cette application restreinte à $\wedge^p X \times \wedge^q X$ provient d'une application continue de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^p \times (X \times \mathbb{R}^\infty)^q$ dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)^{p+q}$; elle est donc continue.

On a donc défini un produit continu de $\wedge X \times \wedge X$ dans $\wedge X$, qui envoie $\wedge_p(X) \times \wedge_q(X)$ dans $\wedge_{p+q}(X)$.

L'ensemble des applications g de X dans $\mathbb{R}^\infty$ telles que $g^{-1}(0) = \{*\}$ est un ensemble convexe, donc connexe par arcs. On montre alors aisément que si g et g' sont deux applications de ce type, les produits induits par g et g' sont homotopes. Il en résulte que le produit dans $\wedge X$ est indépendant, à homotopie près, du choix de g.

Montrons que le point base y_o de $\wedge X$ est un élément homotopiquement neutre pour ce produit.

...

Soit α un nombre réel et soit F_α l'application linéaire de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$F_\alpha(e_o) = e_o \cos\alpha + e_1 \sin\alpha$$

$$i > 0 \Rightarrow F_\alpha(e_i) = e_i \cos^2\alpha + e_{i+1} \sin\alpha$$

Définissons alors l'application $G : X \times \mathbb{R}^\infty \times I \to X \times \mathbb{R}^\infty$ par :

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} (x, F_{\pi\lambda}(t)) & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ (x, f(t, \varepsilon(2\lambda - 1)\, g(x))) & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

ε étant égal à 1 ou a -1.

On vérifie que G induit une application continue de $E(X) \times I$ dans $E(X)$, et, par conséquent, une application continue G' de $\wedge X \times I$ dans $\wedge X$ telle que :

$$G'(y, 0) = y$$

$$G'(y, 1) = \begin{cases} y \cdot y_o & \text{si } \varepsilon = 1 \\ y_o \cdot y & \text{si } \varepsilon = -1 \end{cases}$$

y_o est donc homotopiquement neutre.

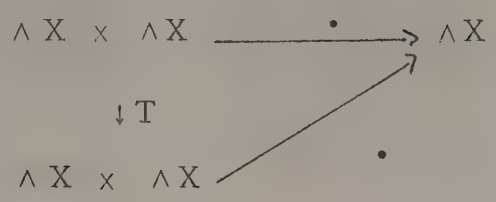
b) H-commutativité.

Si A et B sont deux espaces topologiques, on désignera par $T : A \times B \to B \times A$ l'application : $(a,b) \to (b,a)$.

...

Proposition 1

Le diagramme suivant :



est homotopiquement commutatif.

Considérons l'application $H : X \times \mathbb{R}^\infty \times I \to X \times \mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$H(x, t, \lambda) = (x, F_{\pi\lambda}(t))$$

Comme $F_{\pi\lambda}$ est injectif pour tout λ, H induit une application continue H' de $\wedge X \times I$ dans $\wedge X$, et on vérifie aisément que l'on a :

$$H'(y, 0) = y$$

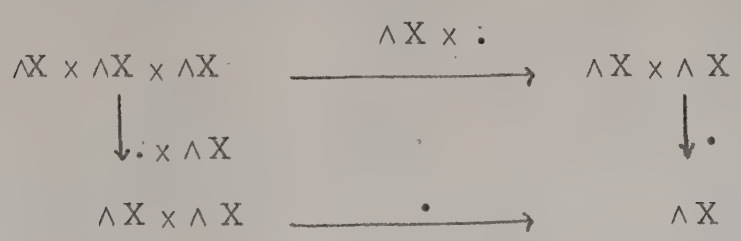
$$y \cdot y' = H'(y' \cdot y, 1)$$

Il en résulte que le produit est homotopiquement commutatif.

c) H - associativité

Proposition 2

Le diagramme suivant :



est homotopiquement commutatif.

...

Soit p_1, p_2 et p_3 les trois projections de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^3$ sur $(X \times \mathbb{R}^\infty)$. Désignons par K_1, K_2 et K_3 les trois applications de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^3 \times I$ dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)$ définies par :

$$K_1(x,t,x',t',x'',t'',\lambda) = \begin{cases} (x, f[f(t,g(x)),g(x)]) & \text{si } 0 \le \lambda \le \frac{2}{3} \\ (x, F_{\frac{3\pi}{2}(1-\lambda)} \circ f(t,g(x)) + g(x)(1-\cos(1-\lambda)\frac{3\pi}{2})e_o) & \text{si } \frac{2}{3} < \lambda \le 1 \end{cases}$$

$$K_2(x,t,x',t',x'',t'',\lambda) = \begin{cases} (x', f[f(t',-g(x')),g(x')]) \text{ si } 0 \le \lambda \le \frac{1}{3} \\ (x', f[f(t',(6\lambda-3)g(x')),(3-6\lambda)g(x')]) \\ \qquad \text{si } 0 \le \lambda \le \frac{2}{3} \\ (x', f[f(t',g(x')),-g(x')]) \text{ si } \frac{2}{3} < \lambda \le 1 \end{cases}$$

$$K_3(x,t,x',t',x'',t'',\lambda) = \begin{cases} (x'', F_{\frac{3\pi}{2}\lambda} \circ f(t'',-g(x'')-g(x'')(1-\cos\frac{3\pi}{2}\lambda)e_o) \\ \qquad \text{si } 0 \le \lambda \le \frac{1}{3} \\ (x'', f[f(t'',-g(x'')),-g(x'')]) \text{ si } \frac{1}{3} < \lambda \le 1 \end{cases}$$

On en déduit une application K de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^3 \times I$ dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)$ définie par :

$$p_1 \circ K = K_1$$

$$p_2 \circ K = K_2$$

$$p_3 \circ K = K_3$$

Soit K''_p l'application de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^p \times (X \times \mathbb{R}^\infty)^p \times (X \times \mathbb{R}^\infty)^p \times$ dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)^{3p}$ définie par :

...

$$K''_p(x_1,t_2;\dots;x_p,t_p;x'_1,t'_1;\dots;x'_p,t'_p;x''_1,t''_1;\dots;x''_p;t''_p;\lambda) =$$
$$(K(x_1,t_1,x'_1,t'_1,x''_1,t''_1,\lambda),\dots,K(x_p,t_p,x'_p,t'_p,x''_p,t''_p,\lambda)$$

Les applications K''_p induisent une application K'' de $((X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty)^3 \times I$ dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$. On vérifie que K'' envoie $E(X)^3 \times I$ dans $E(X)$ et induit une application continue pointée K' de $(\wedge X)^3 \times I$ dans $\wedge X$. On vérifie également que l'on a :

$$K'(y,y',y'',0) = (y.y').y''$$
$$K'(y,y',y'',1) = y.(y'.y'')$$

On en déduit que le produit est homotopiquement commutatif.

d) Fonctorialité

Proposition 3

Soient X_1 et X_2 deux C.W.complexes pointés, et φ une application continue pointée de X_1 dans X_2 ; alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \wedge X_1 \times \wedge X_1 & \xrightarrow{\wedge\varphi \times \wedge\varphi} & \wedge X_2 \times \wedge X_2 \\ \downarrow \cdot & & \downarrow \cdot \\ \wedge X_1 & \xrightarrow{\wedge\varphi} & \wedge X_2 \end{array}$$

est homotopiquement commutatif.

Choisissons deux applications g_1 et g_2, respectivement de X_1 et de X_2 dans $\mathbb{R}^+$ permettant de définir les produits dans $\wedge X_1$ et $\wedge X_2$.

...

Soit $\Phi : (X_1 \times \mathbb{R}^\infty)^2 \times I \to (X_2 \times \mathbb{R}^\infty)^2$

l'application définie par :

$$\Phi(x,t,x',t',\lambda) = (\varphi(x), f(t, \lambda g_1(x) + (1-\lambda) g_2 \circ \varphi(x)), \varphi(x'), f(t', -\lambda g_1(x') - (1-\lambda) g_2 \circ \varphi(x')))$$

On vérifie que Φ induit une application continue pointée Φ' de $(\wedge X_1)^2 \times I$ dans $\wedge X_2$, telle que :

$$\Phi'(y,y',0) = \wedge\varphi(y) \cdot \wedge\varphi(y')$$
$$\Phi'(y,y',1) = \wedge\varphi(y \cdot y')$$

La proposition est donc démontrée.

e) Définition du produit dans $\wedge X$, lorsque X a le type d'homotopie d'un C.W. complexe pointé.

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W. complexe pointé X_1, et soient a et b deux équivalences d'homotopie pointées, respectivement de X dans X_1 et de X_1 dans X.

Choisissons un produit dans $\wedge X_1$ induisant la structure de H-espace de $\wedge X_1$ et posons :

$$\forall y \in \wedge X, \ \forall y' \in \wedge X \qquad y \cdot y' = \wedge b\,(\wedge a(y) \cdot \wedge a(y'))$$

On définit ainsi un produit dans $\wedge X$ qui est clairement indépendant, à homotopie près, du choix de X_1, a, b, et du produit de $\wedge X$. Ce produit est homotopiquement commutatif et associatif, et il est compatible, à homotopie près, avec toute application continue pointée.

...

$\wedge$ est donc un foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés ayant le type d'homotopie de C.W. complexes pointés dans la catégorie des H-espaces homotopiquement commutatifs et associatifs.

f) Cas où $\wedge X$ est un H-groupe.

Proposition 4

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W. complexe pointé. Alors, si X est connexe, $\wedge X$ est un H-groupe homotopiquement commutatif.

Soit S^1 la sphère de dimension 1 que l'on supposera pointée. Si l'on choisit une distance sur S^1, on désignera par $||\lambda||$ la distance de l'élément λ de S au point base de S^1.

Soit λ un élément de S^1. Soit $\overline{\lambda}'$ l'application de $X \times \mathbb{R}^\infty$ dans $(S^1 \wedge X) \times \mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$\overline{\lambda}'(x,t) = (\lambda, x, ||\lambda|| t)$$

$\overline{\lambda}'$ induit une application $\overline{\lambda}$ de $\wedge X$ dans $\wedge (S^1 \wedge X)$, et l'application de $S^1 \times \wedge X$ dans $\wedge(S^1 \wedge X)$ qui à (λ, y) associe $\lambda(y)$ induit une application $s : S^1 \wedge \wedge X \to \wedge (S^1 \wedge X)$.

On vérifie que s est continue.

s induit une application :

$\overline{s} : \wedge X \to \Omega \wedge (S^1 \wedge X)$, $\Omega \wedge (S^1 \wedge X)$ désignant l'espace des lacets de $\wedge (S^1 \wedge X)$.

Nous verrons au paragraphe suivant que $\overline{s}$ est une équivalence d'homotopie pointée si X est connexe.

...

Or la structure de H-espace de $\Omega \wedge (S^1 \wedge X)$ induite par la structure de H-espace de $\wedge X$ et par l'équivalence d'homotopie est identique à la structure de H-espace induite par le foncteur Ω. $\Omega \wedge (S^1 \wedge X)$ et $\wedge X$ sont donc deux H-groupes et le proposition est démontrée.

I.2. Relations entre les structures de monoïde de I (X,M) et de $[\hat{M}, \wedge X]^{\cdot}$

Soit M une variété différentiable sans bord. Comme $\wedge X$ est un H-espace homotopiquement commutatif et associatif, $[\hat{M}, \wedge X]^{\cdot}$ est un monoïde commutatif unitaire.

Proposition 5

L'isomorphisme $\epsilon : I(X,M) \to [\hat{M}, \wedge X]^{\cdot}$ est un isomorphisme de monoïde commutatif unitaire.

On démontrera la proposition lorsque X est un C.W.complexe pointé, le produit dans X étant défini à l'aide d'une application g de X dans R ne s'annulant qu'au point base de X.

L'élément neutre de I (X,M) est représenté par l'immersion (V, α, f) de type X dans M, V étant la variété vide.

Soit λ le plongement de V dans $\mathbb{R}^{\infty}$; on vérifie que l'application $\varphi(\alpha, f, \lambda)$ envoie tout $\hat{M}$ en le point base de $\wedge X$, et représente par conséquent l'élément neutre de $[\hat{M}, \wedge X]^{\cdot}$

Soient maintenant a_o et a_1 deux éléments de I (X,M) représentés par les immersions de type X dans M : (V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1)

...

telles que f_o^{-1} (*) soit un voisinage de ∂V_o et f_1^{-1} (*) un voisinage de ∂V_1.

Soit V' la somme disjointe de V_o et de V_1. Les immersions α_o et α_1 induisent une immersion α' de V' dans M, et les applications f_o et f_1 induisent une application f' de V' dans X. Choisissons une application continue λ' de V' dans $\mathbb{R}^\infty$ telle que :

$$\lambda'|_{\partial V'} = 0$$

$$\lambda' \text{ est injective sur } \overline{V' - f'^{-1}(*)}$$

Soient λ_o et λ_1 les restrictions de λ' à V_o et V_1. Les applications $\varphi(\alpha_o, f_o, \lambda_o)$ et $\varphi(\alpha_1, f_1, \lambda_1)$ représentent alors $\varepsilon(a_o)$ et $\varepsilon(a_1)$.

Soit m un point de M. On pose :

$$\alpha_o^{-1}(m) = \{ v_1^\circ, \ldots, v_p^\circ \}$$

$$\alpha_1^{-1}(m) = \{ v_1^1, \ldots, v_q^1 \}$$

On a alors :

$$\alpha^{-1}(m) = \{ v_1^\circ, \ldots, v_p^\circ, v_1^1, \ldots, v_q^1 \}$$

$\varphi(\alpha_o, f_o, \lambda_o)(m)$ est représenté par l'élément :

$$(f_o(v_1^\circ), \lambda'(v_1^\circ) ; \ldots ; f_o(v_p^\circ), \lambda'(v_p^\circ))$$

et $\varphi(\alpha_1, f_1, \lambda_1)(m)$ est représenté par :

$$(f_1(v_1^1), \lambda'(v_1^1) ; \ldots ; f_1(v_q^1), \lambda'(v_q^1))$$

On en déduit que le produit de $\varphi(\alpha_o, f_o, \lambda_o)(m)$ et de $\varphi(\alpha_1, f_1, \lambda_1)(m)$ est représenté par :

$$(f_o(v_1^\circ), f[\lambda'(v_1^\circ), g \circ f_o(v_1^\circ)] ; \ldots ; f_o(v_p^\circ), f[\lambda'(v_p^\circ), g \circ f_o(v_p^\circ)] ;$$
$$f_1(v_1^1), f[\lambda'(v_1^1), -g \circ f_1(v_1^1)] ; \ldots ; f_1(v_q^1), f[\lambda'(v_q^1), -g \circ f_1(v_q^1)])$$

...

Définissons alors l'application λ de V' dans $\mathbb{R}^\infty$ par :

$$\lambda(v) = \begin{cases} f(\lambda'(v), g \circ f_o(v)) & \text{si } v \in V_o \\ f(\lambda'(v), -g \circ f_1(v)) & \text{si } v \in V_1 \end{cases}$$

On vérifie que λ est nulle sur ∂ V' et injective sur $\overline{V' - f'^{-1}(*)}$ et l'on a :

$$\varphi(\alpha_o, f_o, \lambda_o)(m) \cdot \varphi(\alpha_1, f_1, \lambda_1)(m) = \varphi(\alpha', f', \lambda')(m)$$

ϵ est donc un morphisme de monoïde commutatif unitaire.

Corollaire

Si X est connexe, I (X,M) est un groupe commutatif.

La démonstration est évidente.

I.3. Le produit extérieur de $\wedge X \wedge \wedge X'$ dans $\wedge (X \wedge X')$.

a) Définition du produit dans le cas où X et X' sont deux C.W.complexes pointés.

Soient X et X' deux C.W.complexes pointés de points base * et *' . Soient g et g' deux applications continues, respectivement de X dans $\mathbb{R}^+$ et de X' dans $\mathbb{R}^+$ telles que $g^{-1}(0)$ et $g'^{-1}(0)$ soient réduits respectivement à $\{*\}$ et à $\{*'\}$.

Soit φ l'application de $(\mathbb{R}^\infty)^2$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$\varphi(\Sigma \lambda_i e_i, \Sigma \mu_i e_i) = e_o + \Sigma \lambda_i e_{2i+1} + \Sigma \mu_i e_{2i+2}$$

φ est une application affine injective.

...

Les éléments de $X \wedge X'$ seront notés de la façon suivante : si (x,x') est un élément de $X \times X'$, on notera $x \wedge x'$ l'élément induit dans $X \wedge X'$.

Soit $k \to (i_k, j_k)$ une bijection de $\{1, \ldots, pq\}$ sur $\{1, \ldots, p\} \times \{1, \ldots, q\}$.

Nous allons alors définir une application de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^p \times (X' \times \mathbb{R}^\infty)^q$ dans $(X \wedge X' \times \mathbb{R}^\infty)^{pq}$ de la façon suivante :

si $(x_1,t_1 ; \ldots ; x_p,t_p ; x'_1,t'_1 ; \ldots ; x'_q,t'_q)$ est un élément de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^p \times (X' \times \mathbb{R}^\infty)^q$, on lui associe l'élément de $(X \wedge X' \times \mathbb{R}^\infty)^{pq}$ dont la k-ième projection sur $X \wedge X' \times \mathbb{R}^\infty$ est

$$(x_{i_k} \wedge x'_{j_k}, g(x_{i_k})\, g'(x'_{j_k})\, \varphi(t_{i_k}, t'_{j_k}))$$

On vérifie que cette application induit une application continue pointée de $\wedge^p X \wedge \wedge^q X'$ dans $\wedge^{pq}(X \wedge X')$ indépendante du choix de la bijection de $\{1, \ldots, pq\}$ sur $\{1, \ldots, p\} \times \{1, \ldots, q\}$

On vérifie également que ces applications définies pour toutes les valeurs de p et q sont compatibles et induisent une application de $\wedge X \wedge \wedge X'$ dans $\wedge(X \wedge X')$. Si (y,y') est un élément de $\wedge X \times \wedge X'$, l'image par cette application de $y \wedge y'$ sera notée $y \times y'$.

De même que pour le produit $\cdot$, on vérifie que le produit $\times$ est indépendant, à homotopie près, du choix de g et de g'.

b) H-commutativité

Si A et B sont deux espaces topologiques pointés, on désignera par $T : A \wedge B \to B \wedge A$ l'application : $a \wedge b \to b \wedge a$.

...

Proposition 6

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \wedge X \wedge \wedge X' & \xrightarrow{\times} & \wedge (X \wedge X') \\ \downarrow T & & \downarrow \wedge(T) \\ \wedge X' \wedge \wedge X & \xrightarrow{\times} & \wedge (X' \wedge X) \end{array}$$

est homotopiquement commutatif.

Soit α un nombre réel. Désignons par F_α l'application linéaire de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$F_\alpha(e_o) = e_o$$

$$\forall i \geq 0 \qquad F_\alpha(e_{2i+1}) = e_{2i+1} \cos\alpha + e_{2i+2} \sin\alpha$$

$$\forall i \geq 0 \qquad F_\alpha(e_{2i+2}) = e_{2i+1} \sin\alpha + e_{2i+2} \cos\alpha + e_{2i+3} \sin 2\alpha$$

Soit $\Phi : (X' \wedge X) \times \mathbb{R}^\infty \times I \to (X' \wedge X) \times \mathbb{R}^\infty$ l'application définie par :

$$\Phi(x' \wedge x), t, \lambda) = (x' \wedge x, F_{\frac{\pi}{2}\lambda}(t))$$

On vérifie que pour tout α, F_α est injectif et, que, par conséquent, Φ induit une application continue pointée Φ' de $\wedge (X' \wedge X) \times I$ dans $\wedge(X' \wedge X)$. Il est alors clair que l'on a :

$$\Phi'(y' \times y, 0) = y' \times y$$

$$\Phi'(y' \times y, 1) = \wedge(T)(y \times y')$$

La proposition est donc démontrée et, le produit $\times$ est homotopiquement commutatif.

c) H-associativité

Soient X, X' et X" trois C.W.complexes pointés. On a alors :

...

Proposition 7

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \wedge X \wedge \wedge X' \wedge \wedge X'' & \xrightarrow{\wedge X \wedge \chi} & \wedge X \wedge \wedge (X' \wedge X'') \\ \downarrow \chi \wedge \wedge X'' & & \downarrow \chi \\ \wedge (X \wedge X') \wedge \wedge X'' & \xrightarrow{\chi} & \wedge (X \wedge X' \wedge X'') \end{array}$$

est homotopiquement commutatif.

Choisissons trois applications continues g, g' et g", respectivement de X dans $\mathbb{R}^+$, de X' dans $\mathbb{R}^+$ et de X" dans $\mathbb{R}^+$, telles que $g^{-1}(0)$, $g'^{-1}(0)$, $g''^{-1}(0)$ soient réduits aux points base de X, X', X".

Soient alors h et h' les applications, respectivement de $X \wedge X'$ dans $\mathbb{R}^+$, et de $X' \wedge X''$ dans $\mathbb{R}^\infty$, définies par :

$$h(x \wedge x') = g(x) \cdot g'(x')$$
$$h'(x' \wedge x'') = g'(x') \cdot g''(x'')$$

On vérifie que h et h' ne s'annulent qu'aux points base de $X \wedge X'$ et de $X' \wedge X''$.

Les cinq applications g, g', g", h et h' induisent des produits de $\wedge X \wedge \wedge X'$ dans $\wedge (X \wedge X')$, de $\wedge X' \wedge \wedge X''$ dans $\wedge (X' \wedge X'')$, de $\wedge X \wedge \wedge (X' \wedge X'')$ dans $\wedge (X \wedge X' \wedge X'')$ et de $\wedge (X \wedge X') \wedge \wedge X''$ dans $\wedge (X \wedge X' \wedge X'')$. Ce seront ces produits que l'on utilisera.

Soit α un nombre réel. On désignera par G_α l'application linéaire de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$G_\alpha(e_o) = e_o$$
$$G_\alpha(e_1) = e_1 \cos\alpha + e_2 \sin\alpha$$
$$\forall i \geq 0 \qquad G_\alpha(e_{2i+2}) = e_{2i+2} \cos\alpha + e_{4i+6} \sin\alpha$$

...

$$\forall i \geq 0 \qquad G_\alpha(e_{4i+3}) = e_{4i+3}\cos\alpha + e_{2i+1}\sin\alpha + e_{8i+8}\sin 2\alpha$$

$$\forall i \geq 0 \qquad G_\alpha(e_{4i+5}) = e_{4i+5}\cos\alpha + e_{4i+4}\sin\alpha + e_{8i+12}\sin 2\alpha$$

On vérifie que pour tout α , G_α est injectif.

Soit alors :

$$\Phi_1 : X \times \mathbb{R}^\infty \times X' \times \mathbb{R}^\infty \times X'' \times \mathbb{R}^\infty \times I \to (X \wedge X' \wedge X'') \times \mathbb{R}^\infty$$

l'application définie par :

$$\Phi_1(x,t,x',t',x'',t'') =$$

$$(x\wedge x'\wedge x'',\ g(x)\,g'(x')\,g''(x'')\ G_{\frac{3\pi}{2}\lambda} \circ \varphi(g(x)\,g'(x')\,\varphi(t,t'),t'')) \text{ si } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$$

$$(x\wedge x'\wedge x'', g(x)g'(x')g''(x'')[\varphi((2-3\lambda)g(x)g'(x')t+(3\lambda-1)t, \varphi(g(x)g'(x')t', t''))$$
$$+(g(x)g'(x')-1)\,e_2]) \text{ si } \frac{1}{3} < \lambda \leq \frac{2}{3}$$

$$(x\wedge x'\wedge x'', g(x)g'(x')g''(x'')[\varphi(t, 3(1-\lambda)\varphi(g(x)g'(x')t', t'')+(3\lambda-2)g'(x')g'(x'')$$
$$\varphi(t',t'') + 3(1-\lambda)(g(x)g'(x')-1)\,e_2])$$
$$\text{si } \frac{2}{3} < \lambda \leq 1$$

On définit alors une application Φ'_1 de $(\wedge X \wedge X' \wedge X'') \times I$ dans $\wedge(X \wedge X' \wedge X'')$ de la façon suivante :

Si (x_i,t_i) sont les coordonnées suivant $X \times \mathbb{R}^\infty$ d'un représentant de l'élément y de $\wedge X$, si (x'_j,t'_j) sont les coordonnées suivant $X' \times \mathbb{R}^\infty$ d'un représentant de l'élément y' de $\wedge X'$ et si (x''_k,t''_k), sont les coordonnées suivant $X'' \times \mathbb{R}^\infty$ d'un représentant de l'élément y'' de $\wedge X''$, $\Phi_1(x_i,t_i,x'_j,t'_j,x''_k,t''_k,\lambda)$ sont les coordonnées suivant $(X\wedge X'\wedge X'') \times \mathbb{R}^\infty$ d'un représentant de $\Phi'_1(y\wedge y'\wedge y'',\lambda)$.

On vérifie que Φ'_1 est continue et que l'on a :

$$\Phi'_1(y\wedge y'\wedge y'', 0) = (y \times y') \times y''$$

$$\Phi'_1(y\wedge y'\wedge y'', 1) = y \times (y' \times y'')$$

...

d) Fonctorialité et définition du produit $\times$ dans le cas général.

Proposition 8

Soient X_1, X'_1, X_2, X'_2 quatre C.W.complexes pointés, f une application continue pointée de X_1 dans X_2 et f' une application continue pointée de X'_1 dans X'_2. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \wedge X_1 \wedge \wedge X'_1 & \xrightarrow{\times} & \wedge (X_1 \wedge X'_1) \\ \downarrow \wedge f \wedge \wedge f' & & \downarrow \wedge (f \wedge f') \\ \wedge X_2 \wedge \wedge X'_2 & \xrightarrow{\times} & \wedge (X_2 \wedge X'_2) \end{array}$$

est homotopiquement commutatif.

Choisissons quatre applications g_1, g'_1, g_2, g'_2, respectivement de X_1 dans $\mathbb{R}^+$, de X'_1 dans $\mathbb{R}^+$, de X_2 dans $\mathbb{R}^+$ et de X'_2 dans $\mathbb{R}^+$ qui ne s'annulent qu'aux points base.

Soit $\Phi_2 : X_1 \times \mathbb{R}^\infty \times X'_1 \times \mathbb{R}^\infty \times I \to (X_2 \wedge X'_2) \times \mathbb{R}^\infty$ l'application définie par :

$$\Phi_2(x,t,x',t',\lambda) = (f(x) \wedge f'(x'), (\lambda g_1(x) g'_1(x') + (1-\lambda) g_2 \circ f(x) g'_2 \circ f'(x')) \alpha(t,t'))$$

On vérifie que Φ_2 induit une application continue pointée Φ'_2 de $(\wedge X_1 \wedge \wedge X'_1) \times I$ dans $\wedge(X_2 \wedge X'_2)$ telle que :

$$\Phi'_2(y \wedge y', 0) = \wedge(f)(y) \times \wedge(f')(y')$$

$$\Phi'_2(y \wedge y', 1) = \wedge(f \wedge f')(y \times y')$$

La proposition est donc démontrée.

De même que pour le produit . de $\wedge X$, on peut alors définir un produit $\times$ de $\wedge X \wedge \wedge X'$ dans $\wedge(X \wedge X')$, si X et X' sont deux espaces

...

topologiques pointés ayant le type d'homotopie de deux C.W. complexes pointés. Ce produit vérifie alors toutes les propriétés énoncées ci-dessus.

e) H-distributivité du produit × par rapport au produit .

Proposition 9

Soient X et X' deux espaces topologiques pointés ayant le type d'homotopie de C.W.complexes pointés . Alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \wedge X \wedge (\wedge X' \times \wedge X') & \xrightarrow{f} & \wedge(X \wedge X') \times \wedge(X \wedge X') \\ \downarrow \wedge X \wedge . & & \downarrow . \\ \wedge X \wedge \wedge X' & \xrightarrow{\times} & \wedge(X \wedge X') \end{array}$$

où f est l'application : $y \wedge (y'_1, y'_2) \to (y \times y'_1, y \times y'_2)$, est homotopiquement commutatif.

Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où X et X' sont deux C.W.complexes pointés, ce que l'on supposera.

Choisissons alors deux applications continues g et g', respectivement de X dans $\mathbb{R}^+$ et de X' dans $\mathbb{R}^+$, qui ne s'annulent qu'aux points base et, nous prendrons les produits × et . définis par ces applications. Le produit . dans $\wedge(X \wedge X')$ sera défini par l'application : $x \wedge x' \to g(x)\, g(x')$.

Si α est un nombre réel, on désignera par H_α l'application linéaire de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$H_\alpha(e_o) = e_o \cos\alpha + e_1 \sin\alpha$$
$$H_\alpha(e_2) = e_2 \cos\alpha + e_o \sin\alpha + e_3 \sin 2\alpha$$

...

$$\forall i \geq 0 \quad H_\alpha(e_{2i+1}) = e_{2i+1} \cos\alpha + e_{2i+2} \sin\alpha$$

$$\forall i \geq 2 \quad H_\alpha(e_{2i}) = e_{2i} \cos\alpha + e_{2i-1} \sin\alpha + e_{2i+1} \sin 2\alpha$$

On vérifie que pour tout α, H_α est injective.

Soit $\Phi_3 : X \times \mathbb{R}^\infty \times X' \times \mathbb{R}^\infty \times I \to (X \wedge X') \times \mathbb{R}^\infty$ l'application définie par :

$$\Phi_3(x,t,x',t',\lambda) = \begin{cases} (x \wedge x', g(x)g'(x')H_{\pi\lambda} \circ \varphi(t,t')) & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ (x \wedge x', g(x)g'(x')\, H_{\frac{\pi}{2}} \circ \varphi(t,t') + (2\lambda-1)g(x) & \\ \qquad (1-g'(x')t'_o e_o) & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

(t'_o étant la coordonnée de t' suivant e_o).

Φ_3 induit une application Φ'_3 de $(\wedge X \wedge \wedge X') \times I$ dans $\wedge(X \wedge X'$ telle que :

$$\forall y \in \wedge X, \ \forall y'_1 \in \wedge X' \ \forall y'_2 \in \wedge X'$$

$$\Phi'_3(y \wedge (y'_1 \cdot y'_2), 0) = y \times (y'_1 \cdot y'_2)$$

$$\Phi'_3(y \wedge (y'_1 \cdot y'_2), 1) = (y \times y'_1) \cdot (y \times y'_2)$$

La proposition est donc démontrée.

I.4 Structure de H-module sur $\wedge X$

Soit S° la sphère pointée de dimension 0. D'après ce qui précède, $\wedge S^\circ$ possède deux lois de composition : les produits . et $\times$, tous deux homotopiquement commutatifs et associatifs et tels que le point base de $\wedge S^\circ$ soit un élément homotopiquement neutre pour le produit . , et que le produit $\times$ soit homotopiquement distributif par rapport au produit . .

Nous allons montrer que $\wedge S^\circ$ possède un élément homotopiquement neutre pour le produit $\times$.

...

Soit X un C.W.complexe pointé et g une application continue de X dans $\mathbb{R}^+$ qui ne s'annule qu'au point base. Désignons par s l'élément de S° distinct du point base de S°. L'application de X dans $S^\circ \wedge X$ qui, à x associe $s \wedge x$, permet d'identifier X et $S^\circ \wedge X$. On a alors un produit de $\wedge S^\circ \wedge \wedge X$ dans $\wedge X$.

Soit a l'élément de $\wedge^1 S^\circ$ représenté dans $S^\circ \times \mathbb{R}^\infty$ par (s,0). Pour définir le produit de $\wedge S^\circ \wedge \wedge X$ dans $\wedge X$, on prendra l'application de S° dans $\mathbb{R}^+$ qui envoie le point base de S° en 0, et s en 1.

Soient α un nombre réel et F_α l'application linéaire de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$\forall i \geq 0 \qquad F_\alpha(e_i) = e_i \cos\alpha + e_{2i+2} \sin\alpha$$

Soit G l'application de $X \times \mathbb{R} \times I$ dans $X \times \mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$G(x,t,\lambda) \begin{cases} (x, F_{\pi\lambda}(t)) & \text{si } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ (x, (2(1-\lambda)+(2\lambda-1)g(x)F_{\frac{\pi}{2}}(t)+(2\lambda-1)g(x)\, e_o) & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

G induit une application $G' : \wedge X \times I \to \wedge X$ telle que :

$$\forall y \in \wedge X \qquad G(y,0) = y$$
$$G(y,1) = a \times y$$

a est donc un élément homotopiquement neutre pour le produit $\times$.

Il en résulte que $\wedge S^\circ$ est un H-semi-anneau homotopiquement commutatif et muni d'un élément homotopiquement neutre (pour le produit $\times$) et que, si X est un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé, $\wedge X$ est un H-module sur $\wedge S^\circ$.

...

§ 2 - Le type d'homotopie de $\wedge X$

2.1. Théorème 1.

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé, alors $\wedge X$ filtré par les sous-espaces $\wedge_n X$ a le type d'homotopie d'un C.W. complexe filtré par des sous-complexes.

Il est clair que si X et X' sont deux espaces topologiques pointés ayant le même type d'homotopie, $\wedge X$ filtré par les sous-espaces $\wedge_n X$ a le type d'homotopie de $\wedge X'$ filtré par les sous-espaces $\wedge_n X'$. Il suffit donc de démontrer le théorème lorsque X est un complexe simplicial ordonné pointé par un sommet x_o, ce que nous supposerons.

Si K et K' sont deux complexes simpliciaux ordonnés, l'ensemble $K \times K'$ est muni canoniquement d'une structure de complexe simplicial ordonné de la façon suivante [9] :

les sommets de $K \times K'$ sont les couples (x,x'), x étant un sommet de K et x' un sommet de K'.

$q+1$ sommets $(x_o,x'_o),\ldots,(x_q,x'_q)$ de $K \times K'$ forment un q-simplexe ordonné si et seulement si $(x_o \leq x_1 \leq \ldots \leq x_q)$ est un q-simplexe ordonné dégénéré ou non de K et $(x'_o \leq x'_1 \leq \ldots \leq x'_q)$ est un q-simplexe ordonné dégénéré ou non de K'.

De plus, la topologie de $K \times K'$ induite par la structure de complexe simplicial est plus fine que la topologie produit.

Choisissons alors une triangulation de $\mathbb{R}^\infty$ de façon que $\mathbb{R}^\infty$ soit un complexe simplicial ordonné. On en déduit une structure de complexe simplicial ordonné sur $(X \times \mathbb{R}^\infty)^n$. On vérifie que l'inclusion de $(X \times \mathbb{R}^\infty)$

...

dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)^{n+1}$ est simpliciale ; $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$ est donc un complexe simplicial ordonné.

On vérifie également que l'opération de $S(\infty)$ sur $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$ est compatible avec la structure de complexe simplicial ordonné de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$ et que $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty / S(\infty)$ est aussi un complexe simplicial ordonné.

Soit K le plus grand sous-complexe de X ne contenant pas x_o. Le complémentaire de K sera noté U. U est un voisinage contractile de x_o.

Désignons par p_i la i-ième projection de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$ sur $X \times \mathbb{R}^\infty$, par q la projection de $X \times \mathbb{R}^\infty$ sur X et par q' la projection de $X \times \mathbb{R}^\infty$ sur $\mathbb{R}^\infty$.

Soient i et j deux entiers positifs distincts. On notera E'_{ij} le sous-espace de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$, ensemble des éléments u de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$ tels que :

$$q' \circ p_i (u) \neq q' \circ p_j (u)$$

ou $$q \circ p_i (u) \in U$$

ou $$q \circ p_j (u) \in U$$

On désignera par F_{ij} le complémentaire de E'_{ij}, par E' l'intersection des espaces E'_{ij} et par F le complémentaire de E'.

On vérifie que la diagonale de $(\mathbb{R}^\infty)^2$ est un sous-complexe de $(\mathbb{R}^\infty)^2$ et que l'ensemble des éléments (x,t,x',t') de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^2$ tels que : $x \in K$, $x' \in K'$, $t = t'$, est un sous-complexe de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^2$. Il en résulte que F_{ij} et F sont deux sous-complexes de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$. On vérifie également que F est stable par $S(\infty)$ et $F / S(\infty)$ est un sous-complexe de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty / S(\infty)$.

...

On désignera par $\wedge'X$ le complémentaire de $F/S(\infty)$ dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty / S(\infty)$ et par $\wedge'_n X$ l'espace $\wedge'X \cap [(X \times \mathbb{R}^\infty)^n \times (\{x_o\} \times \mathbb{R}^\infty)^\infty] / S(\infty)$.

On désignera également par $\wedge''X$ l'ensemble $\wedge'X$ muni de la topologie induite par la structure de complexe simplicial de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty / S(\infty)$ et par $\wedge''_n X$ l'ensemble $\wedge'_n X$ muni de la topologie trace de celle de $\wedge''X$.

Enfin, on désignera par f l'inclusion de $\wedge X$ dans $\wedge'X$ et par g l'identité de $\wedge''X$ dans $\wedge'X$. Il est clair que f est une application du système $(\wedge X ; \wedge_o X, \wedge_1 X, \ldots)$ dans le système $(\wedge'X ; \wedge'_o X, \wedge'_1 X, \ldots)$ et que g est une application du système $(\wedge''X ; \wedge''_o X, \wedge''_1 X, \ldots)$ dans le système $(\wedge'X ; \wedge'_o X, \wedge'_1 X, \ldots)$.

a) f est une équivalence d'homotopie

En effet, soit $h : X \times I \to X$ une application continue possédant les propriétés suivantes :

$$\forall \lambda \in I \qquad h(x_o, \lambda) = x_o$$

$$\forall x \in X \qquad h(x,0) = x$$

$$\forall x \in U, \forall \lambda \in I \quad h(x, \lambda) \in U$$

$$\forall x \in U \qquad h(x,1) = x_o$$

L'application : $x \to h(x,1)$ induit une application de E' dans $E(X)$ et donc une application continue f' de $\wedge'X$ dans $\wedge X$ envoyant $\wedge'_n X$ en $\wedge_n X$.

D'autre part, h induit une application de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty \times I$ dans $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty$ compatible avec $S(\infty)$ et donc une application $h_1 : \wedge X \times I \to \wedge X$

...

et une application $h'_1 : \wedge' X \times I \to \wedge' X$

On vérifie les propriétés suivantes :

$$h_1 (\wedge_n X \times I) \subset \wedge_n X$$

$$h'_1 (\wedge'_n X \times I) \subset \wedge'_n X$$

$$\forall y \in \wedge X \qquad h_1(y,0) = y \qquad h_1(y,1) = f' \circ f (y)$$

$$\forall y' \in \wedge' X \qquad h'_1 (y'_1,0) = y' \qquad h'_1(y',1) = f \circ f' (y')$$

f est donc une équivalence d'homotopie entre les deux systèmes $(\wedge X ; \wedge_o X , \wedge_1 X, \ldots)$ et $(\wedge' X ; \wedge'_o X, \wedge'_1 X, \ldots)$.

b) Etude de la topologie de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty / S(\infty)$

Soit A un complexe simplicial. Si a est un sommet de A et x un élément de A, on désignera par $\xi_A (a,x)$ la coordonnée barycentrique de x suivant a.

Définition

Soit A un espace topologique muni d'une structure de complexe simplicial. On dira que la topologie de A est barycentrique si, A_o étant l'espace discret des sommets de A, l'application $\xi_A : A_o \times A \to I$ est continue.

Soient A et B deux complexes simpliciaux ordonnés. On a la formule :

$$\xi_{A \times B} (a,b,x,y) = \inf (\xi_A (a,x) , \xi_B (b,y))$$

On en déduit que la topologie de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^n$ est barycentrique.

...

D'autre part, soient A un complexe simplicial ordonné et G un groupe opérant sur A par une opération compatible avec la structure de complexe simplicial ordonné de A, et telle que A/G soit un complexe simplicial ordonné. Désignons par $\hat{A}$ l'espace A/G, et par $x \to \hat{x}$ la projection de A sur $\hat{A}$. On a :

$$\xi_{\hat{A}}(\hat{a}, \hat{x}) = \sup_{g \in G} \xi_A(g\,a, x)$$

On en déduit que la topologie de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^n/S(n)$ est barycentrique, et qu'il en est de même de la topologie de $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty/S(\infty)$.

c) g est une équivalence d'homotopie (cf [18]).

Nous allons tout d'abord démontrer le lemme :

Lemme

Soit A un complexe simplicial muni d'une topologie barycentrique. Alors, si P est un ensemble de sommets de A, l'application de A dans I : $x \to \sup_{a \in P} \xi_A(a, x)$ est continue.

Soit ψ_P l'application : $x \to \sum_{a \in P} \xi_A(a, x)$ et φ_P l'application : $x \to \sup_{a \in P} \xi_A(a, x)$. Il est clair que ψ_P est s.c.i.. D'autre part, si Q est le complémentaire de P, on a :

$$\psi_P + \psi_Q = 1$$

Comme ψ_P et ψ_Q sont s.c.i., on en déduit que ψ_P est s.c.s. et donc continue.

Si F est une partie finie de P, de complémentaire F', on a :

$$\varphi_F \leq \varphi_P \leq \varphi_F + \psi_{F'}$$

...

On en déduit :

$$\varphi_P = \sup_F \varphi_F = \inf_F (\varphi_F + \psi_{F'})$$

Il en résulte que φ_P est s.c.i. et s.c.s., donc continue, et le lemme est démontré.

Désignons par A' l'espace $(X \times \mathbb{R}^\infty)^\infty / S(\infty)$, par B' le sous-espace $F/S(\infty)$ de A', par A" le complexe A' muni de la topologie induite par la structure de complexe simplicial de A', et par B" le complexe B' muni de la topologie trace de celle de A". On appellera i l'identité de A" dans A'.

Soient A_o l'ensemble des sommets de A' et P l'ensemble des sommets de A' n'appartenant pas à B'. Si a est un élément de A_o, on définira l'application $\beta_a : A' \to I$ par :

$$a \in P \Rightarrow \beta_a(x) = \sup (\xi_{A'}(a,x) - \frac{1}{2} \sup_{b \in P} \xi_{A'}(b,x), 0)$$

$$a \notin P \Rightarrow \beta_a(x) = \sup (\xi_{A'}(a,x) - \frac{1}{2} \sup_{b \in A_o} \xi_{A'}(b,x), 0)$$

β_a est continue et l'on désignera par V_a l'ouvert $\beta_a^{-1}(]0,1])$.

On vérifie que $\{V_a\}$ forme un recouvrement d'ouverts de A' dont la trace sur A'-B' est localement finie et tel que, pour tout a de A_o, V_a est contenu dans l'étoile ouverte de a. On en déduit que l'application : $x \to \sum_{a \in A_o} \beta_a(x)$ est continue sur A'-B' et ne s'annule jamais.

Soit $g' : A' \to A"$ l'application qui envoie tout x de A' en le point de A" de coordonnées barycentriques :

$$\frac{\beta_a(x)}{\sum_{b \in A_o} \beta_b(x)}$$

...

On vérifie les propriétés suivantes :

- $g' \mid_{A'-B'}$ est continue.

- les applications i o g' et g' o i envoient chaque simplexe en lui-même.

- $g'(A'-B') \subset A'' - B''$

Soit alors $h' : A' \times I \to A'$ et $h'' : A'' \times I \to A''$ les applications définies par :

$$h'(x, \lambda) = (1 - \lambda)\, x + \lambda\, i \circ g'(x)$$

$$h''(x, \lambda) = (1 - \lambda)\, x + \lambda\, g' \circ i(x)$$

Il est clair que h' et h'' induisent deux applications continues de $(A' - B') \times I$ dans $A' - B'$ et de $(A''-B'') \times I$ dans $A'' - B''$, et des homotopies de chaque simplexe dans lui-même. g est donc une équivalence d'homotopie entre les deux systèmes $(\wedge''X ; \wedge''_o X, \wedge''_1 X, \ldots)$ et $(\wedge'X ; \wedge'_o X, \wedge'_1 X, \ldots)$.

d) Type d'homotopie de $(\wedge'' X ; \wedge''_o X, \wedge''_1 X, \ldots)$.

Pour démontrer le théorème, il reste à montrer que le système $(\wedge''X ; \wedge''_o X, \wedge''_1 X, \ldots)$ a le type d'homotopie d'un C.W.complexe filtré par des sous-complexes. Pour cela, nous allons montrer qu'il existe sur $A'' - B''$ une structure de C.W.complexe compatible avec la topologie de $A'' - B''$ et telle que, pour tout simplexe σ de A'', $\sigma \cap (A'' - B'')$ soit un sous-complexe de $A'' - B''$.

On désignera par C'' le plus grand sous-complexe de A'' ne rencontrant pas B''.

...

Soit σ un simplexe de A" rencontrant B" et C". Désignons par σ' et σ'' les simplexes $\sigma \cap B''$ et $\sigma \cap C''$. σ est le joint de σ' et σ''.

Si n est un entier strictement positif, on désignera par σ_n l'ensemble des éléments de σ de la forme $\frac{1}{n}\, x + (1 - \frac{1}{n})\, y$, x appartenant à σ' et y à σ''. On désignera également par σ_n^{n+1} l'enveloppe convexe de σ_n et de σ_{n+1}. Ces ensembles σ_n et σ_n^{n+1} et les simplexes de C" seront, par définition, les cellules de A" - B". A" - B" est ainsi muni d'une structure de C.W.complexe compatible avec la topologie de A" - B" et telle que, pour tout simplexe σ de A", $\sigma \cap (A'' - B'')$ est un sous-complexe de A" - B".

Il en résulte que $\wedge''$ X est muni d'une structure de C.W.complexe telle que $\wedge''_n$ X est un sous-complexe de $\wedge''$X, et le théorème est démontré.

2.2. L'application de stabilisation $s : S^1 \wedge \wedge X \to \wedge(S^1 \wedge X)$

Cette application a été définie au 1.1. f). On peut vérifier que s est homotope à l'application s' définie comme suit :

L'application : $\lambda \to (\lambda, 0)$ de S^1 dans $S^1 \times \mathbb{R}^\infty$ est une application de S^1 dans $\wedge^1 S^1$ et induit une application α de S^1 dans $\wedge S^1$. s' est alors l'application :

$$\lambda \wedge y \to \alpha(\lambda) \times y$$

On montre que s est fonctoriel en X.

Théorème 2.

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé. Alors, si X est connexe, l'application

...

$\bar{s} : \wedge X \to \Omega \wedge (S^1 \wedge X)$ déduite de s est une équivalence d'homotopie.

Si X a le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé, alors, d'après le théorème 1, il en est de même de $\wedge X$ et de $\wedge (S^1 \wedge X)$. $\Omega \wedge (S^1 \wedge X)$ a alors le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé [18] et, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que $\bar{s}$ est une équivalence d'homotopie faible.

D'autre part, si X est connexe, on vérifie aisément que E (X) est connexe, et donc que $\wedge X$ est connexe. Il suffit alors de montrer que $\bar{s}$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} I(X, \mathbb{R}^i) & \xrightarrow{\sigma} & I(\theta_X, \mathbb{R}^{i+1}) & \xrightarrow{\theta} & I(S^1 \wedge X, \mathbb{R}^{i+1}) \\ \downarrow \epsilon & & & & \downarrow \epsilon \\ \pi_i(\wedge X) & & \xrightarrow[\pi_i(\bar{s})]{} & & \pi_{i+1}(\wedge(S^1 \wedge X)) \end{array}$$

Toutes les flèches, sauf peut-être $\pi_i(\bar{s})$, sont des isomorphismes. Pour montrer que $\pi_i(\bar{s})$ est un isomorphisme, il suffit donc de montrer que le diagramme est commutatif.

Soit (V, α, f) une immersion de type X dans $\mathbb{R}^i$ représentant l'élément a de $I(X, \mathbb{R}^i)$, telle que $f^{-1}(*)$ soit un voisinage de ∂V. Choisissons une application λ de V dans $\mathbb{R}^\infty$ telle que λ soit nulle sur ∂V et injective sur $V - f^{-1}(*)$. $\epsilon(a)$ est alors représenté par $\varpi(\alpha, f, \lambda)$.

L'immersion α induit une immersion β de $V \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}$ et f induit une application g de $V \times \mathbb{R}$ dans $X \times \mathbb{R}$.

Si l'on identifie S^1 avec le quotient de $\mathbb{R}$ par l'ensemble des nombres réels de valeur absolue supérieure ou égale à 1, on en déduit une surjection : $t \to \bar{t}$ de $\mathbb{R}$ sur S^1 et une application h de $X \times \mathbb{R}$ sur $S^1 \wedge X$ définie par : $h(x,t) = \bar{t} \wedge x$.

...

Choisissons une variété compacte à bord W de dimension $i+1$ telle que :

$$V \times [-2, +2] \subset W \subset V \times \mathbb{R}$$

On vérifie que le triplet $(W, \beta_{|W}, h \circ g_{|W})$ est une immersion de type $S^1 \wedge X$ dans $\mathbb{R}^{i+1}$ qui représente $\theta(\sigma(a))$, et que l'image réciproque du point base de $S^1 \wedge X$ par $h \circ g_{|W}$ est un voisinage de ∂W.

Choisissons une distance sur S^1. Si t est un nombre réel, on notera $||\bar{t}||$ la distance de $\bar{t}$ au point base 1 de S^1. On désignera par $\mu : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\infty$ l'application définie par :

$$\mu(v, t) = ||\bar{t}|| \quad \lambda(v)$$

On peut alors vérifier que $\epsilon \circ \theta \circ \sigma(a)$ est représenté par $\varphi(\beta_{|W}, h \circ g_{|W}, \mu_{|W})$, et que l'on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}^i, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi(\beta_{|W}, h \circ g_{|W}, \mu_{|W})(y,t) = s(\bar{t} \wedge \varphi(\alpha, f, \lambda)(y))$$

$\varphi(\beta_{|W}, h \circ g_{|W}, \mu_{|W})$ représente alors $\pi_i(\bar{s}) \circ \epsilon(a)$ et le diagramme est commutatif, ce qui montre que $\bar{s}$ est une équivalence d'homotopie.

2.3. Le spectre $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$. Calcul de $I(\xi, M)$.

L'application de stabilisation s induit une structure de spectre sur la famille des espaces pointés $\wedge(S^n \wedge X)$, $n \in \mathbb{N}$. Ce spectre sera noté $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$. On notera également $\underset{\sim}{S} \wedge X$ le spectre des suspensions de X.

L'application canonique de $S^n \wedge X$ dans $\wedge^1(S^n \wedge X)$ induit une application α du spectre $\underset{\sim}{S} \wedge X$ dans le spectre $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$.

...

Lemme.

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W. complexe pointé n-1 connexe. Alors la paire $(\wedge X, \wedge_1 X)$ est 2 n - 1 connexe.

Soit p un entier strictement positif. $(\wedge_p X, \wedge_{p-1} X)$ a le type d'homotopie d'une paire de C.W.complexes et l'on a :

$$H_*(\wedge_p X, \wedge_{p-1} X ; Z) = \widetilde{H}_*(\wedge_p X / \wedge_{p-1} X ; Z)$$

Désignons par $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)}$ l'espace $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)}$ privé de toutes ses diagonales. $X^p \times (\mathbb{R}^\infty)^{(p)}$ est un espace topologique sur lequel opère librement le groupe S (p). On désignera par A l'espace quotient $(X^p \times (\mathbb{R}^\infty)^{(p)})/S(p)$, par B' l'ensemble des éléments de $X^p \times (\mathbb{R}^\infty)^{(p)}$ dont l'une des projections sur X est égale au point base, et par B le sous-espace B'/S (p) de A. (A, B) a le type d'homotopie d'une paire de C.W.complexes et A/B est égal à $S_p(X)$. D'autre part, il est clair que (A, B) se fibre sur $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)}/S(p)$ par un fibré de Serre de fibre p n-1 connexe. (A, B) est donc p n-1 connexe et, comme $\wedge_p X / \wedge_{p-1} X$ a le type d'homotopie de $S_p(X)$, on a :

$$\forall p > 0, \ \forall i < p\,n \qquad \widetilde{H}_i(\wedge_p X / \wedge_{p-1} X ; Z) = \widetilde{H}_i(S_p(X) ; Z) = 0$$

On en déduit :

$$\forall i < 2n \qquad H_i(\wedge X, \wedge_1 X ; Z) = 0$$

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\wedge_1 X) & \xrightarrow{a} & \pi_1(\wedge X) & & \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h & & \\ H_1(\wedge_1 X ; Z) & \xrightarrow{b} & H_1(\wedge X ; Z) & \xrightarrow{c} & H_1(\wedge X, \wedge_1 X ; Z) \end{array}$$

...

Comme $\wedge X$ est un H-espace, $\pi_1(\wedge X)$ est commutatif et par conséquent égal à $H_1(\wedge X ; Z)$. h est donc un isomorphisme. D'autre part, $H_1(\wedge X, \wedge_1 X ; Z)$ est nul et b est surjectif. Comme h_1 est surjectif, on en déduit que a est surjectif.

Si n est supérieur ou égal à 2, $\pi_1 X$ est nul et $\wedge_1 X$ qui a le type d'homotopie de X est simplement connexe. $\wedge X$ est donc simplement connexe, et l'on en déduit, par le théorème de Hurewicz, que $(\wedge X, \wedge_1 X)$ est 2n-1 connexe.

Si n est égal à 1, $(\wedge X, \wedge_1 X)$ est 1-connexe car a est surjectif.

Le lemme est ainsi démontré.

Grâce à ce lemme, on en déduit que l'inclusion canonique de $S^n \wedge X$ dans $\wedge(S^n \wedge X)$ est 2n-1 connexe et que α induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie des spectres $\underset{\sim}{S} \wedge X$ et $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$.

Soit M une variété différentiable sans bord. Si X est connexe, $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$ est un Ω- spectre et l'on a :

$$I(X,M) = [\hat{M}, \wedge X]^{\cdot} = \tilde{H}^{\circ}(\hat{M} ; \wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)) = \tilde{H}^{\circ}(\hat{M} ; \underset{\sim}{S} \wedge X) = \lim_n [S^n \wedge \hat{M}, S^n \wedge X]$$

Si ξ est un fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X,A), $T\xi$ est connexe si q est non nul ou si (X,A) est connexe. On en déduit :

Proposition 10

Soit ξ un fibré vectoriel de dimension q sur une paire (X,A) et M une variété différentiable sans bord. Alors, si q est non nul ou si (X,A) est connexe, on a :

$$I(\xi, M) = \tilde{H}^{\circ}(\hat{M} ; \underset{\sim}{S} \wedge T\xi) = \lim_n [S^n \wedge \hat{M}, S^n \wedge T\xi]^{\cdot}$$

...

Corollaire

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé connexe. Alors le i-ième groupe d'homotopie de $\wedge X$ est égal au i-ième groupe d'homotopie stable de X.

Démonstration

$$\pi_i \wedge X = I(X, \mathbb{R}^i) = \tilde{H}^0(S^i, \underset{\sim}{S} \wedge X) = \lim_n [S^{n+i}, S^n \wedge X]^\cdot = \pi_i^S(X)$$

§ 3 - Homologie et cohomologie de $\wedge X$.

Soient $\underset{\sim}{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\underset{\sim}{B} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux spectres. On appellera i-ième groupe d'homologie de $\underset{\sim}{A}$ à cœfficients dans $\underset{\sim}{B}$ le groupe :

$$H_i(\underset{\sim}{A}; \underset{\sim}{B}) = \lim_{\vec{n}} \tilde{H}_{i+n}(A_n; \underset{\sim}{B}) = \lim_{\vec{n}} \lim_{\vec{p}} \pi_{i+n+p}(A_n \wedge B_p)$$

On appellera également i-ième groupe de cohomologie de $\underset{\sim}{A}$ à cœfficients dans $\underset{\sim}{B}$ le groupe :

$$H^i(\underset{\sim}{A}; \underset{\sim}{B}) = \lim_{\overleftarrow{n}} \tilde{H}^{i+n}(A_n; \underset{\sim}{B}) = \lim_{\overleftarrow{n}} \lim_{\vec{p}} [S^p \wedge A_n, B_{i+n+p}]^\cdot$$

3.1. Homologie du spectre $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$.

Théorème 3.

Soient X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé, et $\underset{\sim}{E}$ un spectre. Si α est l'application canonique de $\underset{\sim}{S} \wedge X$ dans $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$, alors $H_i(\alpha, \underset{\sim}{E})$ est un isomorphisme et l'on a :

$$H_i(\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X); \underset{\sim}{E}) = \tilde{H}_i(X; \underset{\sim}{E})$$

...

Si $\underset{\sim}{A}$ est un spectre, désignons par a l'isomorphisme canonique de :

$$\varinjlim_{n}\varinjlim_{p}\pi_{i+n+p}(A_n \wedge E_p) \text{ sur } \varinjlim_{p}\varinjlim_{n}\pi_{i+p+n}(E_p \wedge A_n)$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_i(\underset{\sim}{S} \wedge X ; \underset{\sim}{E}) & \xrightarrow{a} & H_i(\underset{\sim}{E} , \underset{\sim}{S} \wedge X) \\ \downarrow H_i(\alpha ; \underset{\sim}{E}) & & \downarrow H_i(\underset{\sim}{E} ; \alpha) \\ H_i(\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X) ; \underset{\sim}{E}) & \xrightarrow{a} & H_i(\underset{\sim}{E} ; \wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)) \end{array}$$

Pour montrer le théorème, il suffit alors de montrer que $H_i(\underset{\sim}{E} ; \alpha)$ est un isomorphisme.

Or α induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie de $\underset{\sim}{S} \wedge X$ et de $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$. Il en résulte que pour tout p $\tilde{H}_{i+p}(E_p ; \alpha)$ est un isomorphisme.

$H_i(\underset{\sim}{E} ; \alpha)$ est alors un isomorphisme et le théorème est démontré.

3.2. Cohomologie du spectre $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$.

Théorème 4.

Soient X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé, et $\underset{\sim}{E}$ un spectre. Si α est l'application canonique de $\underset{\sim}{S} \wedge X$ dans $\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X)$, alors $H^i(\alpha, \underset{\sim}{E})$ est un isomorphisme et l'on a :

$$H^i(\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X) ; \underset{\sim}{E}) = \tilde{H}^i(X ; \underset{\sim}{E})$$

...

L'application de $S^1 \wedge (S^n \wedge X)$ dans $\wedge (S^{n+1} \wedge X)$ induit une application de $S^1 \wedge \wedge_1 (S^n \wedge X)$ dans $\wedge_1 (S^{n+1} \wedge X)$.

Les espaces $\wedge_1 (S^n \wedge X)$ forment donc un spectre de même que les espaces $\wedge (S^n \wedge X) / \wedge_1 (S^n \wedge X)$.

Désignons par A_n l'espace $\wedge (S^n \wedge X)/\wedge_1 (S^n \wedge X)$ et par $\underset{\sim}{A}$ le spectre $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Nullité des groupes $H^i(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{E})$ et $\lim\limits_{\leftarrow n}{}^1 \widetilde{H}^{i+n}(A_n, \underset{\sim}{E})$

Désignons par a_n l'application de $S^1 \wedge A_n$ dans A_{n+1} définissant la structure de spectre de $\underset{\sim}{A}$.

A_n ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé, il existe des C.W.complexes pointés B_n et des applications continues pointées $b_n : S^1 \wedge B_n \to B_{n+1}$ et $\varphi_n : B_n \to A_n$ tels que :

- b_n envoie la suspension du p-ième squelette de B_n dans le p+1-ième squelette de B_{n+1} (b_n est cellulaire).

- φ_n est une équivalence d'homotopie.

- le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^1 \wedge B_n & \xrightarrow{b_n} & B_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle S^1 \wedge \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} \\ S^1 \wedge A_n & \xrightarrow{a_n} & A_{n+1} \end{array}$$

est homotopiquement commutatif.

Désignons par $\underset{\sim}{B}$ le spectre défini par les espaces B_n et les

...

applications b_n, et par φ l'application de $\underset{\sim}{B}$ dans $\underset{\sim}{A}$ définie par les applications φ_n.

On vérifie immédiatement que $H^i(\varphi, \underset{\sim}{E})$ est un isomorphisme.

Soit B^p_n le n+p-ième squelette de B_n.

On désignera par $G^i_{n\,p}$ le groupe $\widetilde{H}^{i+n}(B^p_n ; \underset{\sim}{E})$.

L'inclusion de B^p_n dans B^{p+1}_n induit une application $\lambda_{n\,p}$ de $G^i_{n\,p+1}$ dans $G^i_{n\,p}$, et b_n induit une application $\mu_{n\,p}$ de $G^i_{n+1\,p}$ dans $G^i_{n\,p}$.

Nous allons montrer que $\lambda_{n\,p}$ est nul si p est strictement inférieur à n.

Comme B^p_n est le n+p-ième squelette de B_n, (B_n, B^p_n) est n + p connexe.

Or, comme $S^n \wedge X$ est n-1 connexe, on en déduit que A_n et B_n sont 2n-1 connexes.

Il en résulte que si p est inférieur ou égal à n, B^p_n est n+p-1 connexe.

Si p est strictement inférieur à n, B^{p+1}_n est alors n+p connexe, et, comme B^p_n est de dimension n+p, l'inclusion de B^p_n dans B^{p+1}_n est homotope à zéro et $\lambda_{n\,p}$ est nul.

Comme B_n est filtré par les sous-complexes B^p_n, on a la suite exacte [22] :

$$0 \to \varprojlim_p{}^1 G^{i-1}_{n\,p} \to \widetilde{H}^{i+n}(B_n ; \underset{\sim}{E}) \to \varprojlim_p G^i_{n\,p} \to 0$$

$\varprojlim_p{}^1 G^{i-1}_{n\,p}$ est l'ensemble des fantômes de $\widetilde{H}^{i+n}(B_n ; \underset{\sim}{E})$.

...

De cette suite exacte, on déduit la suite exacte suivante :

$$0 \to \varprojlim_n \varprojlim_p{}^1 G^{i-1}_{n\,p} \to \tilde{H}^i(B ; E) \to \varprojlim_n \varprojlim_p G^i_{n\,p} \to \varprojlim_n{}^1 \varprojlim_p{}^1 G^{i-1}_{n\,p} \to$$
$$\to \varprojlim_n{}^1 \tilde{H}^{i+n}(B_n ; E) \to \varprojlim_n{}^1 \varprojlim_p G^i_{n\,p} \to 0$$

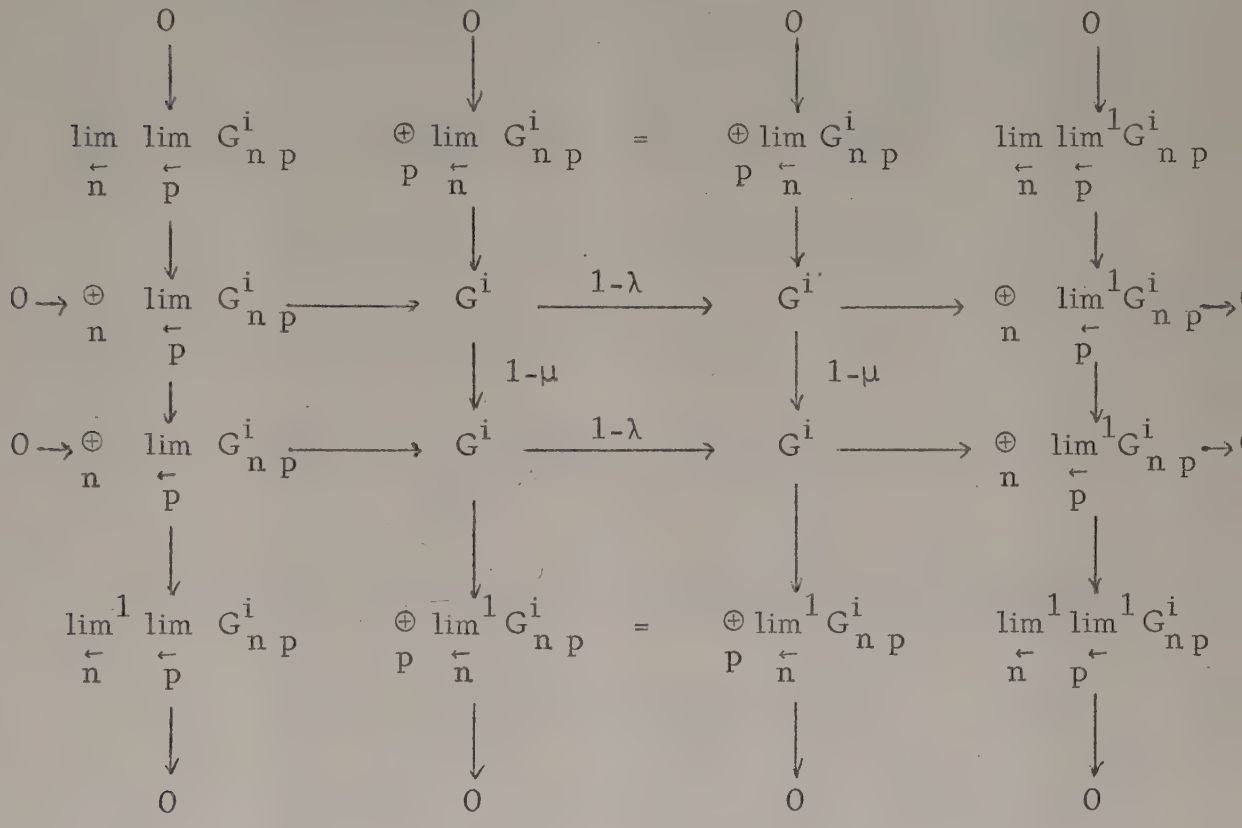
Soit G^i la somme des groupes $G^i_{n\,p}$. Les applications $\lambda_{n\,p}$ et $\mu_{n\,p}$ induisent respectivement deux applications λ et μ de G^i dans lui-même.

On a alors le diagramme commutatif suivant, où les lignes verticales et horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 \to & \varprojlim_p \varprojlim_n G^i_{n\,p} & \to & \oplus_p \varprojlim_n G^i_{n\,p} & \to & \oplus_p \varprojlim_n G^i_{n\,p} & \to & \varprojlim_p{}^1 \varprojlim_n G^i_{n\,p} & \to 0 \\
 & & 0 & & & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & \varprojlim_n \varprojlim_p G^i_{n\,p} & & & & & \varprojlim_n \varprojlim_p{}^1 G^i_{n\,p} & & \\
 & \downarrow & & & & & \downarrow & & \\
0 \to & \oplus_n \varprojlim_p G^i_{n\,p} & \to & G^i & \xrightarrow{1-\lambda} & G^i & \to & \oplus_n \varprojlim_p{}^1 G^i_{n\,p} & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & 1-\mu & & 1-\mu & & & \\
0 \to & \oplus_n \varprojlim_p G^i_{n\,p} & \to & G^i & \xrightarrow{1-\lambda} & G^i & \to & \oplus_n \varprojlim_p{}^1 G^i_{n\,p} & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \varprojlim_n{}^1 \varprojlim_p G^i_{n\,p} & & & & & & \varprojlim_n{}^1 \varprojlim_p{}^1 G^i_{n\,p} & \\
 & \downarrow & & & & & & \downarrow & \\
 & 0 & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & \\
0 \to & \varprojlim_p \varprojlim_n{}^1 G^i_{n\,p} & \to & \oplus_p \varprojlim_n{}^1 G^i_{n\,p} & \to & \oplus_p \varprojlim_n{}^1 G^i_{n\,p} & \to & \varprojlim_p{}^1 \varprojlim_n{}^1 G^i_{n\,p} & \to 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

Or $\lambda_{n\,p}$ est nul si n est strictement supérieur à p. Il en résulte que λ induit l'application nulle sur $\underset{p}{\oplus} \varprojlim_{n} G^i_{n\,p}$ et sur $\underset{p}{\oplus} \varprojlim^1_{n} G^i_{n\,p}$.

On a alors le diagramme suivant :



On vérifie alors que $1 - \mu$ induit sur $\underset{n}{\oplus} \varprojlim_{p} G^i_{n\,p}$ et sur $\underset{n}{\oplus} \varprojlim^1_{p} G^i_{n\,p}$ des isomorphismes, et l'on en déduit :

$$\varprojlim_n \varprojlim_p G^i_{n\,p} = \varprojlim_n \varprojlim^1_p G^i_{n\,p} = \varprojlim^1_n \varprojlim_p G^i_{n\,p} = \varprojlim^1_n \varprojlim^1_p G^i_{n\,p} = 0$$

ce qui entraîne la nullité de $\widetilde{H}^i(\underset{\sim}{B}\,;\,\underset{\sim}{E})$ et de $\varprojlim^1_n \widetilde{H}^{i+n}(B_n\,;\,\underset{\sim}{E})$ et donc de $\widetilde{H}^i(\underset{\sim}{A}\,;\,\underset{\sim}{E})$ et de $\varprojlim^1_n H^{i+n}(A_n\,;\,\underset{\sim}{E})$.

...

b) Démonstration du théorème.

Considérons la suite exacte infinie :

$$\ldots \to \widetilde{H}^{i+n}(A_n ; \underset{\sim}{E}) \to \widetilde{H}^{i+n}(\wedge(S^n \wedge X); \underset{\sim}{E}) \to \widetilde{H}^{i+n}(\wedge_1(S^n \wedge X); \underset{\sim}{E}) \to \ldots$$

C'est une suite exacte de systèmes projectifs de groupes. On a donc une suite spectrale cohomologique convergeant vers zéro et dont le premier terme $E_1^{p\,q}$ est donné par les formules :

$$E_1^{p\,q} = 0 \text{ si } q < 0 \text{ ou } q > 1$$

$$E_1^{3i\ 0} = \lim_{\leftarrow n} \widetilde{H}^{i+n}(A_n ; \underset{\sim}{E}) = 0$$

$$E_1^{3i\ 1} = \lim_{\leftarrow n}{}^1 \widetilde{H}^{i+n}(A_n ; \underset{\sim}{E}) = 0$$

$$E_1^{3i+1\ 0} = \lim_{\leftarrow n} \widetilde{H}^{i+n}(\wedge(S^n \wedge X) ; \underset{\sim}{E}) = H^i(\wedge(\underset{\sim}{S} \wedge X) ; \underset{\sim}{E})$$

$$E_1^{3i+1\ 1} = \lim_{\leftarrow n}{}^1 \widetilde{H}^{i+n}(\wedge(S^n \wedge X); \underset{\sim}{E})$$

$$E_1^{3i+2\ 0} = \lim_{\leftarrow n} \widetilde{H}^{i+n}(\wedge_1(S^n \wedge X) ; \underset{\sim}{E}) = \widetilde{H}^i(X ; \underset{\sim}{E})$$

$$E_1^{3i+2\ 1} = \lim_{\leftarrow n}{}^1 \widetilde{H}^{i+n}(\wedge_1(S^n \wedge X) ; \underset{\sim}{E}) = 0$$

On en déduit immédiatement que $\lim_{\leftarrow n}{}^1 \widetilde{H}^{i+n}(\wedge(S^n \wedge X) ; \underset{\sim}{E})$ est nul et que $H^i(\alpha, \underset{\sim}{E})$ est un isomorphisme, ce qui démontre le théorème.

3.3. L'application $\varphi_p : \wedge X \to \wedge S_p(X)$.

Lemme : Pour tout entier positif p, l'ensemble des applications

...

continues injectives $(\mathbb{R}^\infty)^p / S(p)$ dans $\mathbb{R}^\infty$ est un espace non vide connexe par arcs.

Soit B^n_q la boule de rayon q centrée en réro de $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ est la limite inductive des espaces B^n_q . Il en résulte que $\mathbb{R}^\infty$ est la limite inductive des espaces B^n_n , et par conséquent , $(\mathbb{R}^\infty)^p / S(p)$ est la limite inductive des espaces $(B^n_n)^p / S(p)$.

Or, $(B^n_n)^p / S(p)$ est un espace stratifié compact de dimension n p. On peut donc trouver une suite d'applications continues f_n de $(B^n_n)^p / S(p)$ dans $\mathbb{R}^\infty$ telles que :

- f_n est injective
- f_{n+1} prolonge f_n

Ces applications définissent une application f continue injective de $(\mathbb{R}^\infty)^p / S(p)$ dans $\mathbb{R}^\infty$.

Soit maintenant f et g deux applications continues injectives de $(\mathbb{R}^\infty)^p / S(p)$ dans $\mathbb{R}^\infty$. On peut construire une suite d'applications h_n de $(B^n_n)^p / S(p) \times I$ dans $\mathbb{R}^\infty \times I$ telles que :

- h_n est une homotopie, c'est-à-dire que pour tout $(x,t) \in (B^n_n)^p / S(p) \times I$ la projection de $h_n(x,t)$ sur I est égale à t.
- pour tout $x \in (B^n_n)^p / S(p)$ on a :

$$h_n(x, 0) = (f(x), 0)$$
$$h_n(x, 1) = (g(x), 1)$$

- h_n est injective
- h_{n+1} prolonge h_n

...

Ces applications définissent alors une homotopie injective entre f et g et le lemme est démontré.

Soit p un entier positif. Désignons par f_p l'application de E(X) dans $S_p(X)$ définie comme suit :

Soit $y = (x_1,t_1 ; \ldots ; x_n,t_n)$ un élément de E (X).

Si n est strictement inférieur à p ou si les éléments $x_1, x_2, \ldots ; x_p$ de X ne sont pas tous distincts de *, alors f_p (y) est égal au point base de S_p (X).

Sinon, $t_1, t_2, \ldots t_p$ sont p éléments distincts de $\mathbb{R}^\infty$ et $(x_1,t_1 ; \ldots ; x_p,t_p)$ définit par passage au quotient un élément de $S_p(X)$ que l'on notera f_p (y).

On vérifie aisément que f_p est continue.

Supposons que X est un C.W.complexe pointé, et choisissons une application continue g de X dans $\mathbb{R}^\infty$ qui ne s'annule qu'en *, et une application continue injective h' de $(\mathbb{R}^\infty)^p / S(p)$ dans $\mathbb{R}^\infty$. On notera h l'application induite par h' de $(\mathbb{R}^\infty)^p$ dans $\mathbb{R}^\infty$. Soit enfin k l'application de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$k\left(\Sigma \lambda_i e_i\right) = e_o + \Sigma \lambda_i e_{i+1}$$

On désignera par θ l'application de E (X) dans $\mathbb{R}^\infty$ définie de la façon suivante :

$$\theta(x_1,t_1 ; \ldots ; x_n,t_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_p)\, k \circ h(t_1, \ldots, t_p) & \text{si } n \geq p \end{cases}$$

Soit Π_p l'ensemble des parties de N* de cardinal p. Π_p est un ensemble dénombrable que l'on numérotera :

$$\Pi_p = \{ P_1, P_2, \ldots \}$$

...

Soit P un élément de Π_p. Choisissons une substitution $\sigma \in S(\infty)$ telle que :

$$\sigma(P) = \{1, 2, \ldots, p\}$$

Pour tout y de E(X) on posera :

$$\psi_P(y) = (f_p \circ \sigma(y), \theta \circ \sigma(y))$$

On vérifie que ψ_P est indépendant du choix de σ et que $(\psi_{P_1}(y), \psi_{P_2}(y), \ldots)$ est un élément de $E(S_p(X))$. L'application ainsi définie induit une application de $\wedge X$ sans $\wedge S_p(X))$ que l'on notera φ_p.

φ_p est clairement indépendante, à homotopie près, des choix de g, de h' et de la numérotation de Π_p, ce qui permet de définir φ_p dans le cas où X est un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé.

3.4. Homologie et cohomologie de $\wedge X$.

L'application $f_p : E(X) \to S_p(X)$, restreinte à $E_p(X)$ induit par passage au quotient une application g_p de $\wedge_p X$ dans $S_p(X)$. On vérifie que g_p induit une équivalence d'homotopie de $\wedge_p X / \wedge_{p-1} X$ sur $S_p(X)$.

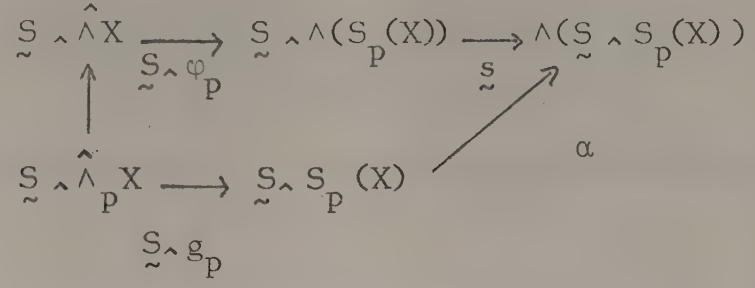
Dans la suite, si Y est un espace topologique pointé, on désignera par $\hat{\wedge} Y$ et $\hat{\wedge}_p Y$ les espaces $\wedge Y$ et $\wedge_p Y$ pointés par un point extérieur.

Considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\wedge} X & \xrightarrow{\varphi_p} & \wedge S_p(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{\wedge}_p X & \xrightarrow{g_p} & S_p(X) \end{array}$$

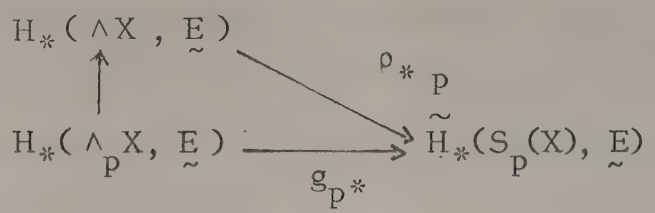
...

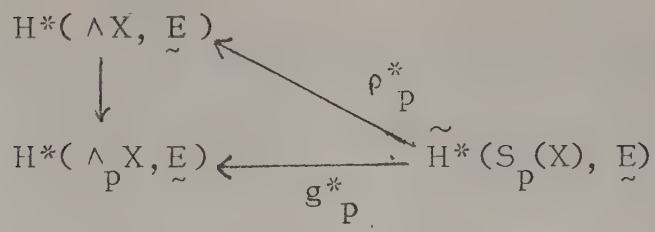
Ce diagramme est homotopiquement commutatif et l'on en déduit le diagramme suivant :



également homotopiquement commutatif.

Soit $\underset{\sim}{E}$ un spectre. $H_*(\alpha, \underset{\sim}{E})$ et $H^*(\alpha, \underset{\sim}{E})$ sont alors des isomorphismes et l'on a les deux diagrammes commutatifs :





avec :

$$\rho_{*\,p} = H_*(\alpha, \underset{\sim}{E})^{-1} \circ H_*(\underset{\sim}{s}, \underset{\sim}{E}) \circ H_*(\underset{\sim}{S} \wedge \varphi_p, \underset{\sim}{E})$$

$$\rho^*_p = H^*(\underset{\sim}{S} \wedge \varphi_p, \underset{\sim}{E}) \circ H^*(\underset{\sim}{s}, \underset{\sim}{E}) \circ H^*(\alpha, \underset{\sim}{E})^{-1}$$

Il en résulte que les suites spectrales d'homologie et de cohomologie de la filtration $(\wedge_n X)_{n\in N}$ de $\wedge X$ dégénèrent complètement. Si l'on désigne par $S_*(X)$ l'espace topologique $S_o(X) \vee S_1(X) \vee S_2(X)$.. par ρ_* l'application de $H_*(\wedge X, \underset{\sim}{E})$ dans $\widetilde{H}_*(S_*(X), \underset{\sim}{E})$ induite par les ρ^*_p, et par ρ^* l'application de $\widetilde{H}^*(S_*(X), \underset{\sim}{E})$ dans $H^*(\wedge X, \underset{\sim}{E})$ induite par les ρ^*_p, on en déduit le :

...

Théorème 5

Les applications :

$$\rho_* : H_*(\wedge X, \underset{\sim}{E}) \longrightarrow \widetilde{H}_*(S_*(X), \underset{\sim}{E})$$

et

$$\rho^* : \widetilde{H}^*(S_*(X), \underset{\sim}{E}) \longrightarrow H^*(\wedge X, \underset{\sim}{E})$$

sont des isomorphismes de Z - modules gradués fonctoriels en X et en $\underset{\sim}{E}$.

Le théorème est évident en homologie. En cohomologie, on vérifie que la restriction de $H^*(\wedge_{p+1} X, \underset{\sim}{E})$ dans $H^*(\wedge_p X, \underset{\sim}{E})$ est surjective, et par conséquent $\wedge X$ ne possède pas de classe de cohomologie fantômatique relative à la filtration $(\wedge_n X)_{n\in N}$. La suite spectrale de cohomologie de la filtration $(\wedge_n X)_{n\in N}$ converge alors vers la cohomologie de $\wedge X$ et on en déduit le théorème immédiatement, la fonctorialité étant évidente.

Le produit . de $\wedge X \times \wedge X$ dans $\wedge X$ étant compatible avec la filtration $(\wedge_n X)_{n\in N}$ induit sur l'espace $\wedge_*(X) = \wedge_o X \vee \wedge_1 X \vee \wedge_2 X \vee \ldots$ un produit envoyant, pour tous entiers p et q, $\wedge_p X \times \wedge_q X$ en $\wedge_{p+q} X$.

Désignons par $g_* : \wedge_* X \longrightarrow S_*(X)$ l'application induite par les applications g_p. Le produit sur $\wedge_* X$ induit un produit, noté . , sur $S_*(X)$ qui fait de $S_*(X)$ un H-espace homotopiquement commutatif et associatif.

Théorème 6

Soit $\underset{\sim}{A}$ un spectre d'anneau. Alors $H_*(\wedge X, \underset{\sim}{A})$ et $\widetilde{H}_*(S_*(X), \underset{\sim}{A})$ sont des $H_*(\text{point}, \underset{\sim}{A})$ - algèbres et ρ_* est un isomorphisme de $H_*(\text{point}, \underset{\sim}{A})$-algèbres.

...

Comme ρ_* est fonctoriel en $\underset{\sim}{A}$, on en déduit que ρ_* est un isomorphisme de $H_*(\text{point}, \underset{\sim}{A})$-modules. Il reste à montrer que ρ_* est un isomorphisme d'algèbre.

Désignons par $\underset{p}{\times} \wedge(S_p(X))$ l'espace pointé

$$\lim_{\rightarrow p} (\wedge(S_o(X)) \times \wedge(S_1(X)) \times \ldots \times \wedge(S_p(X)))$$

Les applications φ_p induisent une application continue pointée $\varphi : \hat{\wedge} X \to \underset{p}{\times} \wedge(S_p(X))$.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
\underset{\sim}{S} \wedge \hat{\wedge} X & \xrightarrow{\underset{\sim}{S} \wedge \varphi} & \underset{\sim}{S} \wedge (\underset{p}{\times} \wedge(S_p(X))) & \xrightarrow{\underset{\sim}{s}} & \underset{p}{\times} \wedge(\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X)) & \xleftarrow{\beta} & S \wedge S_*(X) \\
 & \searrow^{\underset{\sim}{S} \wedge \varphi_p} & \downarrow{\scriptstyle \underset{\sim}{S} \wedge \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \underset{\sim}{S} \wedge f} \\
 & & \underset{\sim}{S} \wedge S_p(X) & \xrightarrow{\underset{\sim}{s}} & \wedge(\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X)) & \xleftarrow{\alpha} & \underset{\sim}{S} \wedge S_p(X)
\end{array}$$

$\underset{p}{\times} \wedge(\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X))$ est le spectre formé par les espaces

$\underset{p}{\times} \wedge(S^n \wedge S_p(X)) = \lim (\wedge(S^n \wedge S_o(X)) \times \wedge(S^n \wedge S_1(X)) \times \ldots \times \wedge(S^n \wedge S_p(X)))$,

π et π' sont les projections.

f est l'application égale à l'identité sur $S_p(X)$ et envoyant $S_*(X) - S_p(X)$ au point base de $S_p(X)$.

β est l'unique application de spectre telle que le carré de droite du diagramme soit commutatif pour tout p.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. $\wedge(S^n \wedge S_p(X))$ est n-1 connexe et $H_n(\wedge(S^n \wedge S_p(X)))$ est libre. Il en résulte que la paire $(\underset{p}{\times} \wedge(S^n \wedge S_p(X)), \wedge(S^n \wedge S_o(X)) \vee \wedge(S^n \wedge S_1(X)) \vee \ldots)$ est 2n-1 connexe. Or, $(\wedge(S^n \wedge S_p(X)), S^n \wedge S_p(X))$ est 2n-1 connexe, la paire $(\underset{p}{\times} \wedge(S^n \wedge S_p(X)), \beta(S^n \wedge S_p(X)))$ est donc 2n-1 connexe et l'on en déduit, en utilisant la méthode du 3.1. que $H_*(\beta, \underset{\sim}{A})$ est un isomorphisme.

...

Comme le diagramme est clairement commutatif, on vérifie immédiatement que l'on a :

$$\rho_* = H_*(\beta, \underset{\sim}{A})^{-1} \circ H_*(\underset{\sim}{s}, \underset{\sim}{A}) \circ H_*(\underset{\sim}{S} \wedge \varphi, \underset{\sim}{A})$$

Pour démontrer le théorème, on montrera que $\underset{\sim}{S} \wedge \hat{\wedge} X$, $\underset{\sim}{S} \wedge (\underset{p}{\times} \wedge S_p(X))$, $\underset{p}{\times} \wedge (\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X))$ et $\underset{\sim}{S} \wedge \underset{\sim}{S}_*(X)$ possèdent des structures de spectre d'anneau telles que $H_*(\underset{\sim}{S} \wedge \hat{\wedge} X, \underset{\sim}{A})$ et $H_*(\underset{\sim}{S} \wedge S_*(X)), \underset{\sim}{A})$ soient respectivement isomorphes à $H_*(\wedge X, \underset{\sim}{A})$ et $\tilde{H}_*(S_*(X), \underset{\sim}{A})$, en tant qu'algèbres, et que $\underset{\sim}{S} \wedge \varphi$, $\underset{\sim}{s}$ et β soient compatibles avec ces structures.

a) Structure de spectre d'anneau sur $\underset{\sim}{S} \wedge \hat{\wedge} X$, $\underset{\sim}{S} \wedge (\underset{p}{\times} \wedge (S_p(X)))$, $\underset{p}{\times} \wedge (\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X))$ et $\underset{\sim}{S} \wedge S_*(X)$.

Le produit de $(S^i \wedge \hat{\wedge} X) \wedge (S^j \wedge \hat{\wedge} X)$ dans $S^{i+j} \wedge \hat{\wedge} X$ est l'application composée :

$$S^i \wedge \hat{\wedge} X) \wedge (S^j \wedge \hat{\wedge} X) \xrightarrow{\sim} (S^i \wedge S^j) \wedge (\hat{\wedge} X \wedge \hat{\wedge} X) \xrightarrow{S^{i+j} \wedge \cdot} S^{i+j} \wedge \hat{\wedge} X$$

Le produit de $(S^i \wedge S_*(X)) \wedge (S^j \wedge S_*(X))$ dans $S^{i+j} \wedge S_*(X)$ est l'application composée :

$$S^i \wedge \wedge S_*(X)) \wedge (S^j \wedge S_*(X)) \xrightarrow{\sim} (S^i \wedge S^j) \wedge (S_*(X) \wedge S_*(X)) \xrightarrow{S^{i+j} \wedge \cdot}$$

$$S^{i+j} \wedge S_*(X)$$

On vérifie immédiatement que $\underset{\sim}{S} \wedge \hat{\wedge} X$ et $\underset{\sim}{S} \wedge S_*(X)$ sont ainsi des spectres d'anneau.

Soient p,q,i et j quatre entiers. Désignons par $F_{p,q}$ l'application composée :

$$\wedge(S^i \wedge S_p(X)) \wedge \wedge(S^j \wedge S_q(X)) \xrightarrow{\times} \wedge(S^i \wedge S_p(X) \wedge S^j \wedge S_q(X)) \xrightarrow{\sim} \wedge(S^{i+j} \wedge S_p(X)$$

$$\wedge S_q(X)) \xrightarrow{\wedge(S^{i+j} \wedge \cdot)} \wedge(S^{i+j} \wedge S_{p+q}(X))$$

Soit alors F l'application de $\underset{p}{\times} \wedge (S^i \wedge S_p(X)) \wedge \underset{p}{\times} \wedge (S^j \wedge S_p(X))$ dans $\underset{p}{\times} \wedge (S^{i+j} \wedge S_p(X))$ telle que, si π_n est la projection de $\underset{p}{\times} \wedge (S^k \wedge S_p(X))$ sur $\wedge (S^k \wedge S_n(X))$, on ait :

$$\pi_n \circ F(u,v) = F_{o,n}(\pi_o u, \pi_n v).F_{1,n-1}(\pi_1 u, \pi_{n-1} v). \ldots . F_{n,o}(\pi_n u, \pi_o, v)$$

Le produit . de S(X) étant homotopiquement associatif, F est défini à homotopie près. On vérifie que F induit sur $\underset{p}{\times} \wedge (\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X))$ une structure de spectre d'anneau.

Si i et j sont nuls, F définit un produit de $(\underset{p}{\times} \wedge (S_p(X))) \wedge (\underset{p}{\times} \wedge (S_p(X)))$ dans $\underset{p}{\times} \wedge (S_p(X))$, et par conséquent une structure de spectre d'anneau sur $\underset{\sim}{S} \wedge (\underset{p}{\times} \wedge (S_p(X)))$.

On désignera par . les produits définis sur ces quatre spectres.

b) Compatibilité de β

Désignons par a_Y l'inclusion canonique d'un C.W.complexe Y dans $\wedge$ Y. Si Y et Z sont deux C.W.complexes, on vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y \wedge Z & \xrightarrow{a_Y \wedge a_Z} & \wedge Y \wedge \wedge Z \\ & \searrow^{a_{Y \wedge Z}} & \downarrow \times \\ & & \wedge (Y \wedge Z) \end{array}$$

Il résulte alors clairement des définitions des produits sur les spectres $\underset{\sim}{S} \wedge S_*(X)$ et $\underset{p}{\times} \wedge (\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X))$ que le diagramme suivant est commutatif :

...

$$\begin{array}{ccc} S^i \wedge S_*(X) \wedge S^j \wedge S_*(X) & \longrightarrow & S^{i+j} \wedge S_*(X) \\ \downarrow \beta \wedge \beta & & \downarrow \beta \\ \underset{p}{x} \wedge (S^i \wedge S_p(X)) \wedge \underset{p}{x} \wedge (S^j \wedge S_p(X)) & \longrightarrow & \underset{p}{x} \wedge (S^{i+j} \wedge S_*(X)) \end{array}$$

β est donc compatible avec les produits de $\underset{\sim}{S} \wedge S_*(X)$ et de $\underset{p}{x} \wedge (\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X))$.

c) Compatibilité de $\underset{\sim}{s}$

On notera $t \to \bar{t}$ l'application $a_{S^i} : S^i \to \wedge S^i$, et $s_i : S^i \wedge (\underset{p}{x} \wedge (S_p(X))) \to \underset{p}{x} \wedge (S^i \wedge S_p(X))$ l'application :

$$t \wedge (x_o, x_1, x_2, \ldots) \to (\bar{t} \times x_o, \bar{t} \times x_1, \bar{t} \times x_2, \ldots)$$

$\underset{\sim}{s}$ est homotope à l'application de spectre définie par les applications s_i.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} S^i \wedge (\underset{p}{x} \wedge (S_p(X))) \wedge S^j \wedge (\underset{p}{x} \wedge (S_p(X))) & \to & S^{i+j} \wedge (\underset{p}{x} \wedge (S_p(X))) & \xrightarrow{S^{i+j} \wedge \pi_n} & S^{i+j} \wedge \wedge (S_n(X)) \\ \downarrow s_i \wedge s_j & & \downarrow s_{i+j} & & \downarrow s \\ \underset{p}{x} \wedge (S^i \wedge S_p(X)) \wedge \underset{p}{x} \wedge (S^j \wedge S_p(X)) & \to & \underset{p}{x} \wedge (S^{i+j} \wedge S_p(X)) & \xrightarrow{\pi_n} & \wedge (S^{i+j} \wedge S_n(X)) \end{array}$$

s étant l'application $t \wedge x \to \bar{t} \times x$.

Pour montrer que $\underset{\sim}{s}$ est un morphisme de spectre d'anneau, il suffit de montrer que le diagramme est commutatif à homotopie près, et par conséquent, il suffit de montrer que pour tout i, j, n les deux applications $s \circ (S^{i+j} \wedge \pi_n) \circ .$ et $\pi_n \circ . \circ (s_i \wedge s_j)$ sont homotopes.

...

$s \circ (S^{i+j} \wedge \pi_n) \circ .$ est l'application (définie à homotopie près) :

$$[t \wedge (x_o, x_1, \ldots)] \to [t' \wedge (x'_o, x'_1, \ldots)] \to$$

$$\overline{t \wedge t'} \times [\wedge(.)(x_o \times x'_n) \,.\, \wedge(.)(x_1 \times x'_{n-1}) \,.\, \ldots \,.\, \wedge(.)(x_n \times x'_o)]$$

Or, le produit est homotopiquement distributif par rapport au produit . , $s \circ (S^{i+j} \wedge \pi_n) \circ .$ est donc homotope à l'application (définie à homotopie près) :

$$[t \wedge (x_o, x_1, \ldots)] \wedge [t' \wedge (x'_o, x'_1, \ldots)] \to$$

$$[\overline{t \wedge t'} \times \wedge(.)(x_o \times x'_n)] \,.\, [\overline{t \wedge t'} \times \wedge(.)(x_1 \times x'_{n-1})] \,.\, \ldots$$

$$\ldots [\overline{t \wedge t'} \times \wedge(.)(x_n \times x'_o)]$$

D'autre part, $\pi_n \circ . \circ (s_i \wedge s_j)$ est l'application (définie à homotopie près) :

$$[t \wedge (x_o, x_1, \ldots)] \wedge [t'_1 \wedge (x'_o, x'_1, \ldots)] \to$$

$$F_{o,n}(\bar{t} \times x_o, \bar{t}' \times x'_n) \,.\, F_{1,n-1}(\bar{t} \times x_1, \bar{t}' \times x'_{n-1}) \,.\, \ldots \,.\, F_{n,o}(\bar{t} \times x_n, \bar{t}' \times x'_o)$$

D'après les propriétés fonctorielles du produit $\times$, on vérifie immédiatement que les applications qui à $[t \wedge (x_o, x_1, \ldots)] \wedge [t' \wedge (x'_o, x'_1, \ldots)]$ associent $F_{p,n-p}(\bar{t} \times x_p, \bar{t}' \times x'_{n-p})$ et $\overline{t \wedge t'} \times \wedge(.)(x_p \times x'_{n-p})$ sont homotopes. Il en résulte que $\underset{\sim}{s}$ est un morphisme de spectre d'anneau.

d) Compatibilité de $\underset{\sim}{S} \wedge \varphi$

Comme les structures de spectre d'anneau de $\underset{\sim}{S} \wedge \hat{\wedge} X$ et de $\underset{\sim}{S} \wedge (\times_p \wedge (S_p(X)))$ sont induites par suspension des structures de

...

H-espace de $\wedge X$ et de $\times_p \wedge (S_p(X))$, pour montrer que $\underset{\sim}{S} \wedge \varphi$ est un morphisme de spectre d'anneau, il suffit de vérifier que φ est un morphisme de H-espace, ce que l'on va faire dans le cas où X est un C.W.complexe pointé.

Soient P et Q deux parties de $\mathbb{N}^*$ de cardinal i et n-i. Soit g une application continue de X dans $\mathbb{R}^+$ qui ne s'annule qu'au point base. Soient h, h' et h" trois applications continues respectivement de $(\mathbb{R}^\infty)^i$, $(\mathbb{R}^\infty)^{n-i}$, $(\mathbb{R}^\infty)^n$ dans $\mathbb{R}^\infty$, se factorisant par des applications continues injectives respectivement de $(\mathbb{R}^\infty)^i / S(i)$, $(\mathbb{R}^\infty)^{n-i}/S(n-i)$ et $(\mathbb{R}^\infty)^n/S(n)$ dans $\mathbb{R}^\infty$. Enfin $f : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ et $f' : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ sont les applications définies par :

$$f(\Sigma \lambda_i e_i, \varepsilon) = \varepsilon e_o + \Sigma \lambda_i e_{i+1}$$

$$f'(\Sigma \lambda_i e_i, \Sigma \mu_i e_i) = e_o + \Sigma \lambda_i e_{2i+1} + \Sigma \mu_i e_{2i+2}$$

Considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E(X) \times E(X) & \xrightarrow{G} & E(X) \\ \downarrow {\scriptstyle \psi_P \times \psi_Q} & & \downarrow {\scriptstyle \psi_{P.Q}} \\ (S_i(X) \times \mathbb{R}^\infty) \wedge (S_{n-i}(X) \times \mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{H} & S_n(X) \times \mathbb{R}^\infty \end{array}$$

G est l'application :

$$(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots) \times (x'_1, t'_1; x'_2, t'_2; \ldots) \to (y_1, \theta_1; y_2, \theta_2; \ldots)$$

avec :

$$y_{2p-1} = x_p \qquad \theta_{2p-1} = f(t_p, g(x_p))$$

$$y_{2p} = x'_p \qquad \theta_{2p} = f(t'_p, -g(x'_p))$$

...

H est l'application déduite par passage au quotient, de l'application :

$$[(x_1,t_1;\ldots;x_i,t_i),\ t]\ ,\ [x'_1,t'_1;\ldots;x'_{n-i},t'_{n-i}),\ t'] \rightarrow$$

$$(x_1,f(t_1,g(x_1));\ldots;x_i,f(t_i,g(x_i));x'_1,f(t'_1,-g(x'_1));\ldots;x'_{n-i},f(t'_{n-i}-g(x'_n$$

$$g(x_1)\ldots g(x_i)g(x'_1)\ldots g(x'_{n-i})f'(t,t')$$

Enfin, P.Q est la partie $(2P-1)\cup 2Q$ de $\mathbb{N}^*$.

On désignera par $j_1,\ldots,j_i$ les éléments de P, par $k_1,\ldots,k_{n-i}$ les éléments de Q, et par π et π' les deux projections de $S_n(X)\times\mathbb{R}^\infty$ sur, respectivement $S_n(X)$ et $\mathbb{R}^\infty$.

Soient $y=(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots)$ et $y'=(x'_1,t'_1;x'_2,t'_2;\ldots)$ deux éléments de E(X). On vérifie que l'on a :

$$\pi\circ\psi_{P.Q}\circ G(y,y') = \pi\circ H\circ(\psi_P\times\psi_Q)(y,y')$$

$$\pi'\circ\psi_{P.Q}\circ G(y,y') = g(x_{j_1})\ldots g(x_{j_i})g(x'_{k_1})\ldots g(x'_{k_{n-i}})f[h''(f(t_{j_1},g(x_{j_1})),$$

$$f(t_{j_i},g(x_{j_i})),f(t'_{k_1},-g(x'_{k_1})),\ldots f(t'_{k_{n-i}},-g(x'_{k_{n-i}})),\ 1\ ]$$

$$\pi'\circ H\circ(\psi_P\times\psi_Q)(y,y') = g(x_{j_1})\ldots g(x_{j_i})g(x'_{k_1})\ldots g(x'_{k_{n-i}})\times$$

$$f'[g(x_{j_1})\ldots g(x_{j_i})f(h(t_{j_1},\ldots,t_{j_i}),1),g(x'_{k_1})\ldots g(x'_{k_{n-i}})\times$$

$$f(h'(t'_{k_1},\ldots,t'_{k_{n-i}}),\ 1)\ ]$$

Soient alors K_o et K_1 les deux applications de $(\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^+)^i\times(\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^+)^{n-i}$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définies par :

...

$$K_o(t_1,\lambda_1;t_2,\lambda_2;\dots;t_i,\lambda_i;t'_1,\lambda'_i;\dots;t'_{n-i},\lambda'_{n-i}) =$$

$$\lambda_1\dots\lambda_i\lambda'_1\dots\lambda'_{n-i} f[h''(f(t_1,\lambda_1),\dots,f(t_i,\lambda_i),f(t'_1,-\lambda'_1),\dots,f(t'_{n-i},-\lambda'_{n-i}))],$$

$$K_1(t_1,\lambda_1;t_2,\lambda_2;\dots;t_i,\lambda_i;t'_1,\lambda'_1;\dots;t'_{n-i},\lambda'_{n-i}) =$$

$$\lambda_1\dots\lambda_i\lambda'_1\dots\lambda'_{n-i} f'[\lambda_1\dots\lambda_i f(h(t_1,\dots,t_i),1),\lambda'_1\dots\lambda'_{n-i}f(h'(t'_1\dots t'_{n-i}),1)]$$

Soit $\mathbb{R}^\infty \wedge \mathbb{R}^+$ l'espace pointé $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^+ / \mathbb{R}^\infty \times \{0\}$. K_o et K_1 se factorisent par deux applications injectives K'_o et K'_1 de $(\mathbb{R}^\infty \wedge \mathbb{R}^+)^i / S(i) \wedge (\mathbb{R}^\infty \wedge \mathbb{R}^+)^{n-i} / S(n-i)$ dans $(\mathbb{R}^\infty, 0)$. On peut alors trouver une homotopie injective K'_t entre K'_o et K'_1. On désignera par K_t l'homotopie entre K_o et K_1 induite par K'_t.

Alors l'application $\Phi_t^{P.Q}$ de $E(X) \times E(X)$ dans $S_n(X) \times \mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$\Phi_t^{P.Q}(y,y') = (\pi \circ \psi_{P.Q} \circ G(y,y'), K_t[t_{j_1}, g(x_{j_1}); \dots ; t_{j_i}, g(x_{j_i}); t'_{k_1}, g(x'_{k_1}); \dots ; t'_{k_{n-i}}, g(x'_{k_{n-i}})])$$

est une homotopie entre $\psi_{P.Q} \circ G$ et $H \circ (\psi_P \times \psi_Q)$ telle que, si P et P' sont deux éléments de $\Pi_{i,Q}$ et Q' deux éléments de $\Pi_{n-i,P.Q}$ étant distinct de P'.Q', et y et y' deux éléments de E(X), $\Phi_t^{P.Q}(y,y')$ et $\Phi_t^{P'.Q'}(y,y')$ sont étrangers quel que soit t.

On vérifie alors que la famille des applications $\Phi_t^{P.Q}$ induit une homotopie Φ_t^i de $\wedge X \times \wedge X$ dans $\wedge(S_n(X))$ telle que :

$$\Phi_1^i = \wedge(.) \circ \times \circ (\varphi_i \times \varphi_{n-i})$$

Si Φ'^i_o est une application de $E(X) \times E(X)$ dans $E(X)$ induisant Φ^i_o,

...

les projections de $\Phi_o'^i$ sur $X \times \mathbb{R}^\infty$ sont les applications $\psi_{PQ} \circ G$, $P \in \Pi_i, Q \in \Pi_{n-i}$.

Désignons par Π_n^i l'ensemble des éléments de Π_n de la forme $P.Q$, $P \in \Pi_i, Q \in \Pi_{n\,i}$. Les ensembles $\Pi_n^o, \Pi_n^1, \ldots \Pi_n^n$ forment une partition de Π_n. Si l'on détermine $\Phi_o'^i$ à l'aide d'une numérotation de Π_n^i : $\Pi_n^i = \{P_1^i, P_2^i, \ldots\}$ et ψ_n à l'aide de la numérotation de Π_n :

$$\Pi_n = \{P_1^o, P_1^1, \ldots, P_1^n, P_2^o, \ldots, P_2^n, P_3^o, \ldots, P_3^n, \ldots\}$$

on vérifie les formules suivantes :

$$\forall y, y' \in E(X) \times E(X) \quad \Phi_o'^i(y,y') = (\psi_{P_1^i} \circ G(y;y'), \psi_{P_2^i} \circ G(y,y'), \ldots)$$

$$\psi_n \circ G(y,y') = (\psi_{P_1^o} \circ G(y,y'), \psi_{P_1^1} \circ G(y,y'), \ldots, \psi_{P_1^n} \circ G(y,y'),$$

$$\psi_{P_2^o} \circ G(y,y'), \ldots, \psi_{P_2^n} \circ G(y,y'), \ldots)$$

Définissons par récurrence les applications $G^P : E(X)^P \to E(X)$ par :

$$G^2 = G$$

$$G^{p+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}) = G(G^p(y_1, \ldots, y_p), y_{p+1})$$

On a alors :

$$\forall (y,y') \in E(X)^2$$

$$G^{n+1}(\Phi_o'^o(y,y'), \Phi_o'^1(y,y'), \ldots, \Phi_o'^n(y,y')) = A \circ \psi_n \circ G(y,y')$$

A étant l'application de E(X) dans E(X) définie par :

$$A(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots) = \sigma(A_1(x_1,t_1); A_2(x_2,t_2); \ldots)$$

avec :

$$j \equiv 1 \bmod (n+1) \Rightarrow A_j(x, \Sigma \lambda_i e_i) = (x, g(x)(e_o + \ldots + e_{n-1}) + \Sigma \lambda_i e_{n+i})$$

$$j \equiv k \bmod (n+1),\ 1 < k \leq n+1 \Rightarrow$$

$$A_j(x, \Sigma \lambda_i e_i) = (x, g(x)(e_o + \ldots + e_{n-k}) - g(x)e_{n-k+1} + \Sigma \lambda_i e_{n-k+2}$$

σ étant une certaine bijection de $\mathbb{N}^*$.

...

Soit $B_k : X \times \mathbb{R}^\infty \times I \to \mathbb{R}^\infty$ l'application définie par:

$$B_k(x, \Sigma \lambda_i e_i, \mu) = (1-\mu)\, g(x) \left[e_o + \dots + e_{n-k} - \varepsilon\, e_{n-k+1} \right] + (1-\mu)\Sigma \lambda_i\, e_{n-k+1+\varepsilon+i} + \mu \Sigma \lambda_i\, e_{n+i}$$

avec :

$$k = 1 \Rightarrow \varepsilon = 0$$

$$1 < k \leq n+1 \Rightarrow \varepsilon = 1$$

Enfin, soit $C : \mathbb{R}^\infty \times I \to \mathbb{R}^\infty$ l'application définie par :

$$C(\Sigma \lambda_i e_i, \mu) = \mu \Sigma \lambda_i e_i + (1-\mu)\Sigma \lambda_i e_{n+i}$$

Posons alors :

$$D_j(x,t,\mu) = \begin{cases} (x, B_k(x,t,2\mu) & 0 \leq \mu \leq \frac{1}{2} \\ & j \equiv k \bmod (n+1) \; 1 \leq k \leq n+ \\ (x, C(t, 2\mu - 1)) & \frac{1}{2} \leq \mu \leq 1 \end{cases}$$

$$D_\mu(x_1,t_1 ; x_2,t_2; \dots) = \sigma(D_1(x_1,t_1,\mu) ; D_2(x_2,t_2,\mu) ; \dots)$$

On vérifie que pour tout $\mu \in I$, D_μ est une application de $E(X)$ dans $E(X)$ qui induit une application D'_μ de $\wedge X$ dans $\wedge X$.

Soit G'^{n+1} l'application de $(\wedge X)^{n+1}$ dans $\wedge X$ induite par G^{n+1}. On peut alors choisir le produit F sur $\underset{p}{\times} \wedge(S_p(X))$ de façon que l'on ait :

$$\pi_n \circ F(u,v) = G'^{n+1}(F_{o,n}(\pi_o u, \pi_n v), F_{1,n-1}(\pi_1 u, \pi_{n-1} v) \dots, F_{n,o}(\pi_n u, \pi_o v))$$

On vérifie alors que :

$$\forall (y,y') \in \wedge X \times \wedge X$$

$$\pi_n \circ F(\varphi(y), \varphi(y')) = G'^{n+1}(\Phi_1^o(y,y'), \Phi_1^1(y,y'), \dots, \Phi_1^n(y,y'))$$

...

L'application $(y,y') \to F(\varphi(y),\varphi(y'))$ est alors homotope à l'application L définie par :

$$\pi_n \cdot L(y,y') = G'^{n+1}(\Phi^o_o(y,y'), \Phi^1_o(y,y'), \ldots, \Phi^n_o(y,y'))$$
$$= D'_o \circ \varphi_n \circ G'(y,y') = D'_o \circ \varphi_n (y.y')$$

Comme D'_o est homotope à D'_1 qui est l'identité sur $\wedge X$, on en déduit que L est homotope à $\varphi \circ G'$. Les deux applications de $\wedge X \times \wedge X$ dans $\underset{p}{\times} \wedge(S_p(X))$:

$$(y,y') \to F(\varphi(y), \varphi(y')) = \varphi(y) \cdot \varphi(y')$$

et $$(y,y') \to \varphi(y.y')$$

sont donc homotopes et φ est compatible avec les structures de H-espaces de $\wedge X$ et de $\underset{p}{\times} \wedge(S_p(X))$.

Ainsi on a montré que $H_*(\underset{\sim}{S} \wedge \hat{\wedge} X, \underset{\sim}{A})$, $H_*(\underset{\sim}{S} \wedge \underset{p}{\times} \wedge(S_p(X)), \underset{\sim}{A})$, $H_*(\underset{p}{\times} \wedge(\underset{\sim}{S} \wedge S_p(X)), \underset{\sim}{A})$ et $H_*(\underset{\sim}{S} \wedge S_*(X), \underset{\sim}{A})$ sont des algèbres telles que $H_*(\underset{\sim}{S} \wedge \hat{\wedge} X, \underset{\sim}{A})$ et $H_*(\underset{\sim}{S} \wedge S_*(X), \underset{\sim}{A})$ sont isomorphes à $H_*(\wedge X, \underset{\sim}{A})$ et $\tilde{H}_*(S_*(X), \underset{\sim}{A})$ en tant qu'algèbres, et que $H_*(\underset{\sim}{S} \wedge \varphi, \underset{\sim}{A})$, $H_*(\underset{\sim}{s}, \underset{\sim}{A})$ et $H_*(\beta, \underset{\sim}{A})$ sont des morphismes d'algèbres. Il en résulte immédiatement que ρ_* est un morphisme d'algèbres et le théorème est démontré.

3.5. Relations entre les applications φ_p et ρ_{*p} et les variétés multiples d'une immersion générique.

Soient V et M deux variétés différentiables sans bord, V étant compacte, α une immersion générique de V dans M de fibré normal ν et i un entier strictement positif.

...

On désignera par V_i la i-ième variété multiple de α, par α_i l'immersion de V_i dans M induite par α, et par ψ_i l'application fibrée du fibré normal ν_i de α_i dans $S_i(\nu)$ (voir ch.I). (V,α,Id) et (V_i,α_i,ψ_i) sont deux immersions dans M de type, respectivement: ν et $S_i(\nu)$.

Désignons par $[\alpha]$ la classe de (V,α,Id_ν) dans $I(\nu,M)$ et par $[\alpha_i]$ la classe de (V_i,α_i,ψ_i) dans $I(S_i(\nu),M)$.

D'autre part, φ_i induit une application φ_{i*} de $[\hat{M},\wedge T\nu]^\cdot$ dans $[\hat{M},\wedge S_i(T\nu)]^\cdot = [\hat{M},\wedge T S_i(\nu)]^\cdot$. On a alors le

Théorème 7.

Les deux classes d'homotopie d'applications pointées de $\hat{M}$ dans $\wedge(S_i(T\nu))$, $\varepsilon \circ \theta[\alpha_i]$ et $\varphi_{i*}(\varepsilon \circ \theta[\alpha])$ sont égales.

Choisissons une structure riemannienne sur M. ν est alors également muni d'une structure riemannienne. On désignera par B et B' les espaces totaux des fibrés en boules de rayon respectivement 2 et 1 de ν. Par l'exponentielle, on déduit une application différentiable β de B dans M. A condition de bien choisir la structure riemannienne sur M, on peut supposer que β est une immersion et que $\beta_{|\partial B}$ est une immersion générique. Comme V est une variété sans bord, B est une variété à bord, et, si l'on désigne par π la projection canonique de B sur $T\nu$, quotient de B par $B - \mathring{B}'$, (B,β,π) est une immersion de type $T\nu$ dans M qui représente la classe $\theta[\alpha]$.

Désignons par $B^{(i)}$ l'espace B^i privé de toutes ses diagonales, par β^i l'application de $B^{(i)}$ dans M^i induite par β et par $\tilde{B}_i$ l'image réciproque de la diagonale de M^i par l'application β^i.

...

On appellera bord de $\widetilde{B}_i$ l'ensemble $\partial \widetilde{B}_i$ des points de $\widetilde{B}_i$ dont l'une des projections sur B appartient à ∂B. $\beta_{|\partial B}$ étant une immersion générique, on vérifie que $\widetilde{B}_i$ est une variété à coins (de bord $\partial \widetilde{B}_i$) sur laquelle opère librement le groupe S(i). Soit B_i la variété $\widetilde{B}_i / S(i)$. B_i est une variété compacte à coins contenant la variété V_i.

D'autre part, l'immersion β de B dans M induit une immersion β_i de B_i dans M qui prolonge α_i.

Soit λ une application de B dans $\mathbb{R}^\infty$ nulle sur ∂B et injective sur B'. L'application $\varphi(\beta, \pi, \lambda)$ représente alors $\varepsilon \circ \theta[\alpha]$.

λ et π induisent une application Ψ de $B^{(i)}$ dans $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)} \wedge \underbrace{T\nu \wedge \ldots \wedge T\nu}_{i \text{ fois}}$ compatible avec l'action de S(i), donc une application Ψ de $(B_i, \partial B_i)$ dans $S_i(T\nu)$. On vérifie que Ψ induit une application fibrée du fibré normal de V_i dans B_i dans le fibré $S_i(\nu)$. Or, le fibré normal de V_i dans B_i n'est autre que le fibré normal ν_i de α_i. On a ainsi une application de ν_i dans $S_i(\nu)$ qui n'est autre que Ψ_i.

Soit B'_i l'espace $(B'^{(i)} \cap \widetilde{B}_i) / S(i)$. B'_i est une sous-variété de B_i contenue dans l'intérieur de B_i.

Soit W une variété compacte à bord comprise entre B'_i et B_i, de même dimension que M. $(W, \beta_{i|W}, \Psi_{|W})$ est alors une immersion de type $TS_i(\nu) = S_i(T\nu)$ dans M qui représente $\theta[\alpha_i]$.

Choisissons une distance d sur B et posons, pour tout x de B,

$$g'(x) = d(x, B - B')$$

g' induit une application continue g de $T\nu$ dans $\mathbb{R}^+$ qui ne s'annule qu'au point base de $T\nu$.

D'autre part, soit h une application continue de $(\mathbb{R}^\infty)^i$ dans $\mathbb{R}^\infty$ induite par une application injective de $(\mathbb{R}^\infty)^i / S(i)$ dans $\mathbb{R}^\infty$.

...

Désignons par μ' l'application de B^i dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$\mu(x_1,\ldots,x_i) = g(x_1)\ldots g(x_i)\, f\,[h(\lambda(x_1),\ldots,\lambda(x_i)),1\,]$$

La restriction de μ' à $\widetilde{B}_i$ est compatible avec l'action de S(i) et induit une application μ de B_i dans $\mathbb{R}^\infty$.

On vérifie que μ est nulle sur $B_i - \mathring{B}'_i$ et injective sur $\mathring{B}'_i$. $\varepsilon \circ \theta\,[\alpha_i]$ est donc représenté par $\varphi(\beta_i|_W, \psi|_W, \mu|_W)$, c'est-à-dire par $\varphi(\beta_i,\psi,\mu)$.

Nous allons maintenant montrer que les deux applications $\varphi(\beta_i,\psi,\mu)$ et $\varphi_i \circ \varphi(\beta,\pi,\lambda)$ sont homotopes, ce qui démontrera le théorème.

Soit y un point de M et $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ l'ensemble $\beta^{-1}(y)$.

Si n est strictement inférieur à i, il est clair que $\varphi(\beta_i,\psi,\mu)(y)$ et $\varphi_i \circ \varphi(\beta,\mu,\lambda)(y)$ sont égaux au point base de $\wedge S_i(T\nu)$.

On supposera maintenant n supérieur ou égal à i.

$(\pi(x_1),\lambda(x_1);\pi(x_2),\lambda(x_2);\ \ldots\ ;\pi(x_n),\lambda(x_n))$ est un représentant de $\varphi(\beta,\pi,\lambda)(y)$ dans $E(T\nu)$.

Soit $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_i\}$ une partie de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal i. $(x_{p_1},x_{p_2},\ldots,x_{p_n})$ est un élément de $\beta_i^{-1}(y)$ que l'on notera x(P). On vérifie alors que, si l'on définit l'application φ_i à l'aide des applications g et h définies plus haut, $\varphi_i \circ \varphi(\beta,\mu,\lambda)(y)$ possède un représentant dans $E(S_i(T\nu))$ dont les coordonnées suivant $S_i(T\nu) \times \mathbb{R}^\infty$ sont les éléments $(\psi(x(P)),\mu(x(P)))$, P parcourant l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal i. Or, l'application $P \to x(P)$ est une bijection de l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal i sur $\beta_i^{-1}(y)$. Il

...

en résulte que $\varphi(\beta_i, \psi, \mu)(y)$ est égal à $\varphi_i \circ \varphi(\beta, \pi, \lambda)(y)$ et le théorème est démontré.

Soit $\underset{\sim}{E}$ un spectre.

Comme i est strictement positif, ρ_{*i} induit l'application nulle sur $H_*(\wedge_o T\nu, \underset{\sim}{E})$. ρ_{*i} définit donc une application de $H_*(\wedge T\nu, \wedge_o T\nu ; \underset{\sim}{E})$ dans $\widetilde{H}_*(S_i(T\nu), \underset{\sim}{E})$, c'est-à-dire, puisque $\wedge_o T\nu$ est contractile, une application que l'on notera $\widetilde{\rho}_{*i}$ de $\widetilde{H}_*(\wedge T\nu, \underset{\sim}{E})$ dans $\widetilde{H}_*(S_i(T\nu), \underset{\sim}{E})$. L'application $\widetilde{\rho}_{*i} \circ \widetilde{H}_*(\varepsilon \circ \theta\,[\alpha]\,, \underset{\sim}{E})$ est une application de $\widetilde{H}_*(\hat{M}, \underset{\sim}{E})$ dans $\widetilde{H}_*(S_i(T\nu)\,;\,\underset{\sim}{E})$ que l'on notera $T_{i*}(\alpha)$.

Théorème 8.

Si $\underset{\sim}{A}$ est un spectre d'anneau et si M est muni d'une $\underset{\sim}{A}$-orientation, l'image par ψ_* de la classe fondamentale de la variété $(B_i, \partial B_i)$ $\underset{\sim}{A}$-orientée par β et la $\underset{\sim}{A}$-orientation de M, est égale à l'image par $T_{i*}(\alpha)$ de la classe fondamentale de M.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons quelques lemmes.

Lemme 1.

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'unC.W.complexe pointé, et soit (V, α, f) une immersion de type X dans M représentant l'élément a de $I(X, M)$. Alors $f_*\,[V, \partial V]$ est un élément de $\widetilde{H}_*(X, \underset{\sim}{A})$ qui ne dépend que de a.

En effet, soient (V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1) deux immersions de type X dans M représentant a et (W, A, β, g) un cobordisme entre

...

(V_o, α_o, f_o) et (V_1, α_1, f_1). Comme M est $\underset{\sim}{A}$-orientée, M x I est également $\underset{\sim}{A}$-orientée, et l'on en déduit une $\underset{\sim}{A}$-orientation sur W.

Soient i_o et i_1 les deux inclusions de $(V_o, \partial V_o)$ et $(V_1, \partial V_1)$ dans (W, A). On vérifie l'égalité dans $H_*(W, A, \underset{\sim}{A})$:

$$i_{o*}[V_o, \partial V_o] = i_{1*}[V_1, \partial V_1]$$

Il en résulte immédiatement les égalités :

$$f_{o*}[V_o, \partial V_o] = f_{1*}[V_1, \partial V_1] = g_*(i_{o*}[V_o, \partial V_o])$$

L'élément $f_*(V, \partial V)$ ainsi défini sera noté $F(a)$, et l'on désignera par $F'(a)$ l'élément $\rho_{*1} \circ \widetilde{H}_*(\varepsilon(a), \underset{\sim}{A})[M, \infty]$.

Lemme 2

Σ_* désignant l'homomorphisme de suspension en homologie, on a, pour tout a de $I(X, M)$:

$$F(\theta \circ \sigma(a)) = (-1)^{\dim M} \Sigma_* F(a)$$
$$F'(\theta \circ \sigma(a)) = (-1)^{\dim M} \Sigma_* F'(a)$$

Soit (V, α, f) une immersion de type X dans M. On en déduit une immersion β de $V \times \mathbb{R}$ dans $M \times \mathbb{R}$ et une application g de $V \times \mathbb{R}$ dans $S^1 \wedge X$ définie par :

$$g(v, t) = \overline{t} \wedge f(v)$$

$t \to \overline{t}$ étant la projection de $\mathbb{R}$ sur S^1 considéré comme quotient de $\mathbb{R}$ par le sous-espace $R -]0, 1[$.

Si W est une sous-variété compacte à bord de $V \times \mathbb{R}$ contenant un voisinage de $V \times I$, $(W, \beta_{|W}, g_{|W})$ est une immersion de type $S^1 \wedge X$ dans $M \times \mathbb{R}$ qui représente $\theta \circ \sigma(a)$.

...

On a alors :

$$g_*[W,\partial W] = g_*[V\times I,\partial(V\times I)] = g_*([V,\partial V]\times[I,\partial I])$$

$$= (-1)^{\dim M}[I,\partial I]\times g_*[V,\partial V] = (-1)^{\dim M}\Sigma_* g_*[V,\partial V]$$

Soit :

$$F(\theta\circ\sigma(a)) = (-1)^{\dim M}\Sigma_* F(a)$$

D'autre part, si φ est une application continue pointée de $\hat{M}$ dans $\wedge X$ représentant $\epsilon(a)$, on vérifie aisément que $\epsilon(\theta\circ\sigma(a))$ est représenté par l'application composée :

$$\widetilde{M\times\mathbb{R}} \to \hat{M}\wedge S^1 \to S^1\wedge\hat{M} \xrightarrow{S^1\wedge\varphi} S^1\wedge\wedge X \xrightarrow{s} \wedge(S^1\wedge X)$$

On en déduit l'égalité :

$$\epsilon\circ\theta\circ\sigma(a)_*[M\times\mathbb{R},\infty] = (-1)^{\dim M}s_*([S^1]\times\epsilon(a)_*[M,\infty])$$

D'autre part, $\tilde{\rho}_{*1}$ est défini à l'aide du morphisme de spectre de $\underset{\sim}{S}\wedge X$ dans $\wedge(\underset{\sim}{S}\wedge X)$. Comme s est l'application définie par la structure de spectre de $\wedge(\underset{\sim}{S}\wedge X)$, il en résulte :

$$\tilde{\rho}_{*1}\circ(\epsilon\circ\theta\circ\sigma(a))_*[M\times\mathbb{R},\infty] = (-1)^{\dim M}\Sigma_*\,\tilde{\rho}_{*1}\circ\epsilon(a)_*[M,\infty]$$

soit :

$$F'(\theta\circ\sigma(a)) = (-1)^{\dim M}\Sigma_* F'(a)$$

Lemme 3

Les deux applications F et F' sont égales.

Soit r un entier strictement supérieur à la dimension n de M. Désignons par b l'élément $(\theta\circ\sigma)^r(a)$ de $I(S^r\wedge X,M)$. Comme $S^r\wedge X$ est r-1 connexe, $(\wedge(S^r\wedge X), S^r\wedge X)$ est 2r-1 connexe donc r + n connexe. Or, $M\times\mathbb{R}^r$ est de dimension r + n. Il en résulte que

...

l'application :

$$[\widehat{M \times \mathbb{R}^r},\ S^r \wedge X]^{\cdot} \rightarrow [\widehat{M \times \mathbb{R}^r}, \wedge(S^r \wedge X)]^{\cdot}$$

est surjective, et b peut être représenté par une immersion (W, β, g) de type $S^r \wedge X$ dans $M \times \mathbb{R}^r$ telle que β soit un plongement.

Désignons alors par π la projection de $M \times \mathbb{R}^r$ sur $W/\partial W$, qui est égale à β^{-1} sur W et qui envoie $M \times \mathbb{R}^r - \beta(W)$ en ∂W. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{M \times \mathbb{R}^r} & \xrightarrow{\pi} & W/\partial W & \xrightarrow{g} & S^r \wedge X \\ & & & & \downarrow i \\ & & & & \wedge(S^r \wedge X) \end{array}$$

i étant l'inclusion canonique.

On vérifie immédiatement que la classe d'homotopie de $i \circ g \circ \pi$ est égale à $\epsilon(b)$, et que l'on a :

$$\rho_{*1} \circ \epsilon(b)\,[M \times \mathbb{R}^r, \infty] = \rho_{*1} \circ i_* \circ g_* \circ \pi_* [M \times \mathbb{R}^r, \infty]$$

$$= g_* \circ \pi_* [M \times \mathbb{R}^r, \infty] = g_* [W, \partial W]$$

soit :

$$F'(b) = F(b)$$

Comme l'homomorphisme de suspension est bijectif, on en déduit, grâce au lemme 2, que $F'(a)$ et $F(a)$ sont égaux, et le lemme est démontré.

Nous sommes alors en mesure de démontrer le théorème.

En effet, soit W une variété à bord contenue dans B_i et contenant B'_i. On a alors :

$$\psi_* [B_i, \partial B_i] = \psi_* [W, \partial W]$$

...

Soit a_i la classe de cobordisme de $(W, \beta_i|_W, \psi|_W)$. D'après le théorème 7, $\varepsilon(a_i)$ est égal à $\varphi_{i*}(\varepsilon \circ \theta[\alpha])$.

On a donc :

$$\psi_*[B_i, \partial B_i] = \psi_*[W, \partial W] = F(a_i) = F'(a_i)$$

$$= \tilde{\rho}_{*1} \circ H_*(\varphi_{i*}(\varepsilon \circ \theta[\alpha]), \underset{\sim}{A})[M, \infty]$$

$$= \tilde{\rho}_{*1} \circ H_*(\varphi_i, \underset{\sim}{A}) \circ H_*(\varepsilon \circ \theta[\alpha], \underset{\sim}{A})[M, \infty]$$

$$= \tilde{\rho}_{*i} \circ H_*(\varepsilon \circ \theta[\alpha], \underset{\sim}{A})[M, \infty] = T_i(\alpha)[M, \infty]$$

Le théorème est donc démontré.

CHAPITRE IV

HOMOLOGIE DE $\wedge X$ A COEFFICIENT DANS UN CORPS

§ 1 - Propriétés générales de $H_*(\wedge X ; k)$ et de $\tilde{H}_*(S_*(X) ; k)$

I.I. Hyperalgèbre et hypermodule gradués.

Définition

Soit k un corps. On appellera hyperalgèbre graduée sur k, tout 6-uple $(A_*, \Delta, ., \times, 1, e)$ possédant les propriétés suivantes :

i) A_* est un k-module gradué

ii) Δ est une application linéaire de degré 0 de A_* dans $A_* \otimes A_*$

iii) . et $\times$ sont deux applications linéaires de degré 0 de $A_* \otimes A_*$ dans A_*

iv) $(A_*, \Delta, .)$ est une algèbre de Hopf commutative d'unité 1

v) $(A_*, \Delta, \times)$ est une algèbre de Hopf commutative d'unité e

vi) le produit $\times$ est distributif par rapport au produit . , c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} A_* \otimes A_* \otimes A_* \otimes A_* & \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} & A_* \otimes A_* \otimes A_* \otimes A_* & \xrightarrow{\times \otimes \times} & A_* \otimes A_* \\ \uparrow{\scriptstyle \Delta \otimes 1 \otimes 1} & & & & \downarrow \\ A_* \otimes A_* \otimes A_* & \xrightarrow{1 \otimes .} & A_* \otimes A_* & \xrightarrow{\times} & A_* \end{array}$$

T étant l'application : $a \otimes b \to (-1)^{\partial^\circ a \, \partial^\circ b} b \otimes a$

...

Définition

Soit $(A_*, \Delta, ., \times, 1, e)$ une hyperalgèbre graduée sur k. On appellera hypermodule gradué sur cette hyperalgèbre, tout 5-uple $(M_*, \Delta', .', \times', 1')$ possédant les propriétés suivantes :

i) M_* est un k-module gradué

ii) Δ' est une application linéaire de degré 0 de M_* dans $M_* \otimes M_*$

iii) $.'$ est une application linéaire de degré 0 de $M_* \otimes M_*$ dans M_*

iv) $(M_*, \Delta', .')$ est une algèbre de Hopf commutative d'unité 1

v) $\times'$ est une application linéaire de degré 0 de $A_* \otimes M_*$ dans M_*

vi) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A_* \otimes A_* \otimes M_* & \xrightarrow{1 \otimes \times'} & A_* \otimes M_* \\ \downarrow{\scriptstyle \times \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \times'} \\ A_* \otimes M_* & \xrightarrow{\times'} & M_* \end{array}$$

vii) le produit $\times'$ est distributif par rapport au produit $.'$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A_* \otimes A_* \otimes M_* \otimes M_* & \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} & A_* \otimes M_* \otimes A_* \otimes M_* & \xrightarrow{\times' \otimes \times'} & M_* \otimes M_* \\ \uparrow{\scriptstyle \Delta \otimes 1 \otimes 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle .'} \\ A_* \otimes M_* \otimes M_* & \xrightarrow{1 \otimes .'} & A_* \otimes M_* & \xrightarrow{\times'} & M_* \end{array}$$

viii) le produit $\times'$ est distributif par rapport au produit $.$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A_* \otimes A_* \otimes M_* \otimes M_* & \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} & A_* \otimes M_* \otimes A_* \otimes M_* & \xrightarrow{\times' \otimes \times'} & M_* \otimes M_* \\ \uparrow{\scriptstyle 1 \otimes 1 \otimes \Delta'} & & & & \downarrow{\scriptstyle .'} \\ A_* \otimes A_* \otimes M_* & \xrightarrow{. \otimes 1} & A_* \otimes M_* & \xrightarrow{\times'} & M_* \end{array}$$

I.2. L'hyperalgèbre $H_*(\wedge S^\circ, k)$.

Soit S° la sphère de dimension 0. On a vu que $\wedge S^\circ$ est un H-semi-anneau homotopiquement commutatif et possédant un élément homotopiquement neutre. Il en résulte la

Proposition 1

$H_*(\wedge S^\circ, k)$ est une hyperalgèbre graduée sur k.

La démonstration est évidente.

Comme le point base de S° est isolé dans S°, $\wedge S^\circ$ est la somme topologique des espaces $\wedge_n S^\circ - \wedge_{n-1} S^\circ$. Soit alors f l'application de $\wedge S^\circ$ dans $S_*(S^\circ)$, qui sur $\wedge_n S^\circ - \wedge_{n-1} S^\circ$ est égale à la projection canonique de $\wedge_n S^\circ$ sur $S_n(S^\circ)$.

Proposition 2

$\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), k)$ est une hyperalgèbre graduée sur k, et f induit un isomorphisme d'hyperalgèbre de $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), k)$.

On a déjà vu que le produit . de $\wedge S^\circ$ induit un produit sur $\wedge_* S^\circ$ et sur $S_*(S^\circ)$. Quant au produit $\times$, on vérifie qu'il est compatible avec la filtration $(\wedge_n S^\circ)_{n \in \mathbb{N}}$ et induit un produit (noté $\times$) de $\wedge_* S^\circ \wedge \wedge_* S^\circ$ dans $\wedge_* S^\circ$ envoyant $\wedge_p S^\circ \wedge \wedge_q S^\circ$ dans $\wedge_{pq} S^\circ$.

Si p et q sont strictement positifs, on a :

$$(p-1)\,q \leq pq - 1 \qquad p\,(q-1) \leq pq - 1$$

On en déduit donc un produit de $S_p(S^\circ) \wedge S_q(S^\circ)$ dans $S_{pq}(S^\circ)$.

...

Si p ou q est nul, on vérifie que le produit envoie $\wedge_p S^\circ \wedge \wedge_q S^\circ$ au point base de $\wedge_o S^\circ$, ce qui permet encore de définir un produit de $S_p(S^\circ) \wedge S_q(S^\circ)$ dans $S_{pq}(S^\circ)$. On a ainsi défini un produit de $S_*(S^\circ) \wedge S_*(S^\circ)$ dans $S_*(S^\circ)$.

On vérifie alors que f est une équivalence d'homotopie de $\wedge S^\circ$ sur le complémentaire du point base de $S_*(S^\circ)$, et est compatible avec les produits de $\wedge S^\circ$ et de $S_*(S^\circ)$. La proposition est donc démontrée.

Soient i un nombre entier et π la projection canonique de $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}$ sur $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}/S(i)$. Choisissons un point $x=(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ de $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}$. La fibre $\pi^{-1}(\pi x)$ s'identifie alors canoniquement au groupe S(i). Comme $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}$ est le revêtement universel de $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}/S($ on en déduit un isomorphisme :

$$\varphi_x : \pi_1((\mathbb{R}^\infty)^{(i)}/S(i), \pi x) \xrightarrow{\sim} S(i)$$

D'autre part, $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}$ est contractile, on en déduit une équivalence d'homotopie :

$$\psi_x : (\mathbb{R}^\infty)^{(i)}/S(i) \to K(S(i), 1)$$

et donc un isomorphisme :

$$H_*((\mathbb{R}^\infty)^{(i)}/S(i), k) \to H_*(S(i), k)$$

On vérifie que cet isomorphisme est indépendant du choix de x et de l'application ψ_x induisant φ_x. Or, $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}/S(i)$ est le complémentaire du point base dans $S_i(S^\circ)$, et ce point base est isolé ; on en déduit un isomorphisme canonique g_i de $\tilde{H}_*(S_i(S^\circ), k)$ sur $H_*(S(i), k)$.

...

On désignera par g_* l'isomorphisme de $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ),k)$ sur $H_*(S(*),k) = \bigoplus_{i\geq 0} H_*(S(i),k)$ induit par les applications g_i.

Soient p et q deux entiers positifs ou nuls. Choisissons deux ensembles A et B de cardinal p et q respectivement, une bijection α de $\{1,\ldots,p\}$ sur A, une bijection β de $\{1,\ldots,q\}$ sur B, une bijection γ de $\{1,\ldots,p+q\}$ sur la somme disjointe A + B de A et B, et une bijection δ de $\{1,\ldots,pq\}$ sur le produit $A\times B$ de A et B.

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ induisent une action de S(p) sur A, de S(q) sur B, de S(p+q) sur A + B et de S(pq) sur $A\times B$.

On en déduit alors une action de $S(p)\times S(q)$ sur A + B et une action de $S(p)\times S(q)$ sur $A\times B$, de la façon suivante :

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\in S(p)\\ \tau\in S(q)\\ c\in A+B\\ (a,b)\in A\times B\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}(\sigma,\tau)(c) = \begin{cases}\sigma(c) & \text{si } c\in A\\ \tau(c) & \text{si } c\in B\end{cases}\\ (\sigma,\tau)(a,b) = (\sigma(a),\tau(b))\end{array}$$

On obtient ainsi deux morphismes de groupes :

$$\varphi^{pq} : S(p)\times S(q) \to S(p+q)$$

$$\psi^{pq} : S(p)\times S(q) \to S(p.q)$$

Ces applications sont clairement indépendantes, à automorphisme intérieur près, du choix de $A,B,\alpha,\beta,\gamma,\delta$, et induisent deux applications :

...

$$\varphi_*^{pq} : H_*(S(p),k) \otimes H_*(S(q),k) \to H_*(S(p+q),k)$$

$$\psi_*^{pq} : H_*(S(p),k) \otimes H_*(S(q),k) \to H_*(S(p.q),k)$$

indépendantes du choix de $A, B, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Proposition 3

Soient $\Delta : H_*(S(*),k) \to H_*(S(*),k) \otimes H_*(S(*),k)$ l'application induite par les applications diagonales de $H_*(S(p),k)$, $.$ et $\times$ les produits dans $H_*(S(*),k)$ induits par les applications φ_*^{pq} et ψ_*^{pq} respectivement, 1 et e les générateurs canoniques de $H_o(S(0),k)$ et $H_o(S(1),k)$ respectivement ; alors, $(H_*(S(*),k), \Delta, ., \times, 1, e)$ est une hyperalgèbre sur k et g_* est un isomorphisme d'hyperalgèbres.

On vérifie immédiatement que g_* envoie les deux unités de $\tilde{H}_*(S_*(S^0),k)$ en 1 et e, et que g_* est compatible avec les applications diagonales. Il reste à montrer que g_* est compatible avec les produits $.$ et $\times$.

Choisissons, pour définir les produits $.$ et $\times$ de $S_*(S^0)$, l'application de S^0 dans $\mathbb{R}^+$, nulle sur le point base, et égale à 1 en dehors. On désignera par f_1 et f_2 les deux applications respectivement de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\infty$ et de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définies par :

$$f_1(\Sigma \lambda_i e_i, \epsilon) = \epsilon e_o + \Sigma \lambda_i e_{i+1}$$

$$f_2(\Sigma \lambda_i e_i, \Sigma \mu_i e_i) = e_o + \Sigma \lambda_i e_{2i+1} + \Sigma \mu_i e_{2i+2}$$

Enfin, on choisira une bijection $k \to (i_k, j_k)$ de $\{1, \ldots, pq\}$ sur $\{1, \ldots, p\} \times \{1, \ldots, q\}$.

...

Les produits . et $\times$ de $S_p(S^\circ) \wedge S_q(S^\circ)$ dans, respectivement $S_{p+q}(S^\circ)$ et $S_{p\,q}(S^\circ)$ sont induits par passage au quotient des deux applications h_1 et h_2 de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times (\mathbb{R}^\infty)^{(q)}$ dans, respectivement $(\mathbb{R}^\infty)^{(p+q)}$ et $(\mathbb{R}^\infty)^{p\,q}$ définies par :

$$h_1(x_1,\ldots,x_p;x'_1,\ldots,x'_q) = (f_1(x_1,1),\ldots,f_1(x_p,1),f_1(x'_1,-1),\ldots,f_1(x'_q,-1))$$

$$h_2(x_1,\ldots,x_p;x'_1,\ldots,x'_q) = (f_2(x_{i_1},x'_{j_1}),\ldots,f_2(x_{i_{pq}},x'_{j_{pq}}))$$

Choisissons un point $x = (x_1,\ldots,x_p)$ de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)}$ et un point $x' = (x'_1,\ldots,x'_q)$ de $(\mathbb{R}^\infty)^{(q)}$. $(\mathbb{R}^\infty)^{(p+q)}$ et $(\mathbb{R}^\infty)^{(p\,q)}$ seront pointés respectivement par $h_1(x,x')$ et $h_2(x,x')$. Les espaces $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)}/S(p)$ $(\mathbb{R}^\infty)^{(q)}/S(q)$, $(\mathbb{R}^\infty)^{(p+q)}/S(p+q)$ et $(\mathbb{R}^\infty)^{(p\,q)}/S(p\,q)$ sont alors pointés et l'on obtient quatre isomorphismes :

$$\pi_1((\mathbb{R}^\infty)^{(p)}/S(p)) \to S(p)$$

$$\pi_1((\mathbb{R}^\infty)^{(q)}/S(q)) \to S(q)$$

$$\pi_1((\mathbb{R}^\infty)^{(p+q)}/S(p+q) \to S(p+q)$$

$$\pi_1((\mathbb{R}^\infty)^{(p\,q)}/S(p\,q) \to S(p\,q)$$

On vérifie d'autre part, que les produits . et $\times$ de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)}/S(p) \times (\mathbb{R}^\infty)^{(q)}/S(q)$ dans, respectivement $(\mathbb{R}^\infty)^{(p+q)}/S(p+q)$ et $(\mathbb{R}^\infty)^{p\,q)}/S(p\,q)$ sont des applications pointées. On en déduit alors deux produits :

$$\varphi'^{pq} : S(p) \times S(q) \to S(p+q)$$

$$\psi'^{pq} : S(p) \times S(q) \to S(p\,q)$$

On vérifie que ces deux produits sont les applications φ^{pq}

...

et ψ^{pq} définies à l'aide des ensembles A et B et des applications $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ avec :

$$A = \{1, \ldots, p\}$$

$$B = \{1, \ldots, q\}$$

$$\alpha = Id_A$$

$$\beta = Id_B$$

$$\gamma(i) = \begin{cases} i \in A & \text{si } i \leq p \\ i-p \in B & \text{si } i > p \end{cases}$$

$$\delta(k) = (i_k, j_k) \in A \times B$$

La proposition est donc démontrée.

$H_*(S(*),k)$ est un k-module bigradué. Les éléments de $H_i(S(j),k)$ seront dits de dimension i et de rang j, et l'on notera dim x et rg x la dimension et le rang d'un élément homogène de $H_*(S(*),k)$. On vérifie alors les propriétés suivantes :

$$\dim 1 = 0 \qquad rg\, 1 = 0$$

$$\dim e = 0 \qquad rg\, e = 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dim x = i & \dim y = i' \\ rg\ x = j & rg\ y = j' \end{array}\right| \Rightarrow \quad \dim x.y = i + i' \qquad \dim x \times y = i + i'$$

$$rg\ x.y = j + j' \qquad rg\ x \times y = jj'$$

I.3. L'hypermodule $H_*(\wedge X, k)$.

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé. On a vu que $\wedge X$ est un H-module sur $\wedge S^\circ$. On en déduit la proposition :

...

Proposition 4

$H_*(\wedge X,k)$ est un hypermodule gradué sur $H_*(\wedge S^\circ,k)$

I.4. L'algèbre $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ et le produit $\times$ de $\oplus_{n>0} \widetilde{H}_*(S_n(S^\circ),k) \otimes \widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ dans $\widetilde{H}_*(S_*(x),k)$.

Proposition 5

$\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ est une k-algèbre commutative graduée munie d'un produit noté $\times$ de $\oplus_{n>0} \widetilde{H}_*(S_n(S^\circ),k) \otimes \widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ dans $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ associatif par rapport au produit $\times$ de $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ),k)$ et distributif par rapport au produit . de $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ),k)$ et au produit de $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$.

On a vu que le produit . dans X induit un produit dans $S_*(X)$ et que $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ est une k-algèbre commutative graduée. D'autre part, le produit $\times$ de $\wedge S^\circ \wedge \wedge X$ dans $\wedge X$ envoie $(\wedge_p S^\circ - \wedge_{p-1} S^\circ) \wedge \wedge_q X$ en $\wedge_{pq} X$. Si donc p est strictement positif, on obtient un produit (noté $\times$) de $S_p(X) \wedge S_q(X)$ dans $S_{pq}(X)$.

Les homotopies construites au III 1.3 pour montrer les propriétés de H-associativité du produit $\times$ et de H-distributivité du produit $\times$ par rapport au produit . , sont compatibles avec les filtrations $(\wedge_n X)$, $n \in N$, des espaces $\wedge X$ considérés. On en déduit que $S_*(X)$ est un H-module sur le semi-anneau $\vee_{p>0} S_p(S)$ et l'on montre immédiatement la proposition.

On dira que $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ est un hypermodule gradué sur $\oplus_{n>0} \widetilde{H}_*(S_n(S^\circ),k)$.

...

Soient K_n un C.W.complexe de type $K(S(n),1)$ et E_n son revêtement universel. Si X' est la réalisation géométrique du complexe singulier de X, et si l'on désigne par A_n(resp.A'_n) le sous-espace de X^n(resp.X'^n) ensemble des points dont au moins une des projections sur X (resp.X') est égale au point base, on vérifie que les paires $((E_n \times X'^n)/S(n), E_n \times A'_n)/S(n))$ et $(((\mathbb{R}^\infty)^{(n)} \times X^n)/S(n), ((\mathbb{R}^\infty)^{(n)} \times A_n)/S(n))$ ont le même type d'homotopie.

Or, $E_n \times X'^n$ admet une structure canonique de C.W.complexe telle que l'espace topologique sous-jacent a le type d'homotopie de l'espace topologique $E_n \times X'^n$. Si l'on désigne alors par $C_*(X)$ le k-complexe singulier de X, par $\widetilde{C}_*(X)$ le quotient de $C_*(X)$ par le k-module engendré par le point base de X', et par W_n le k-complexe de chaîne de E_n, on vérifie que l'homologie $\widetilde{H}_*(S_n(X),k)$ est isomorphe à l'homologie du complexe $W_n \underset{S(n)}{\otimes} \widetilde{C}_*(X)^n$, $\widetilde{C}_*(X)^n$ étant la n-ième puissance tensorielle de $\widetilde{C}_*(X)$.

Notation :

Soit C_* un k-module différentiel gradué et W_* un $k[S(n)]$-module différentiel gradué libre acyclique. Alors l'homologie du complexe $W_* \underset{S(n)}{\otimes} C_*^n$ est indépendante du choix de W_* et sera notée : $H_*(S(n), C_*^n)$.

Proposition 6

$\widetilde{H}_*(S_n(X),k)$ et $H_*(S(n), \widetilde{C}_*(X)^n)$ sont deux k-modules gradués isomorphes.

La démonstration résulte trivialement du fait que W_n est un $k[S(n)]$-module différentiel gradué libre acyclique.

...

On désignera par h_n l'isomorphisme de $\widetilde{H}_*(S_n(X,k)$ sur $\widetilde{H}_*(S(n),\widetilde{C}_*(X)^n)$ et par h_* l'isomorphisme de $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ sur $\bigoplus_{n\geq 0} \widetilde{H}_*(S(n),\widetilde{C}_*(X)^n)$ induit par les applications h_n.

$\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ étant un hypermodule gradué sur $\bigoplus_{n>0} \widetilde{H}_*(S_n(S^\circ),k)$ on en déduit, par transport de structure que $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n), \widetilde{C}_*(X)^n)$ est un hypermodule gradué sur $\bigoplus_{n>0} \widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), k)$.

§ 2 - Etude du k-module $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n),\widetilde{C}_*(X)^n)$

Si H est un k-module, on désignera par H^n la n-ième puissance tensorielle de H. De même, on désignera les n-ièmes puissances tensorielles d'une application linéaire f et d'un élément u de H par f^n et u^n respectivement.

2.1. Le produit . dans $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n),\widetilde{C}_*(X)^n)$.

Soient p et q deux entiers positifs ou nuls. $S(p) \times S(q)$ opère sur $\{1,\ldots,p+q\}$ de la façon suivante :

$$(\sigma\ ,\ \tau)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \leq p \\ p + \tau(i-p) & \text{si } i > p \end{cases}$$

On en déduit une application $\varphi^{p\,q}$ de $S(p) \times S(q)$ dans $S(p+q)$.

Soient W_i, $i \in \mathbb{N}$, des $k[S(i)]$-modules différentiels gradués libres acycliques. L'application $\varphi^{p\,q}$ induit sur W_{p+q} une structure

...

de $S(p) \times S(q)$-module et l'on choisira une application linéaire φ_{pq}, $S(p) \times S(q)$-équivariante, de $W_p \otimes W_q$ dans W_{p+q}.

Soit α^{pq} l'application composée :

$$W_p \otimes \tilde{C}_*(X)^p \otimes W_q \otimes \tilde{C}_*(X)^q \xrightarrow{T} W_p \otimes W_q \otimes \tilde{C}_*(X)^p \otimes \tilde{C}_*(X)^q \xrightarrow{\varphi_{pq} \otimes 1} W_{p+q} \otimes \tilde{C}_*(X)^{p+q}$$

où T est la transposition :

$$a \otimes b \otimes c \otimes d \longrightarrow (-1)^{ij}\, a \otimes c \otimes b \otimes d \qquad \text{avec } \dim b = i,\ \dim c = j$$

Proposition 7

La restriction du produit . à $H_*(S(p), \tilde{C}_*(X)^p) \otimes H_*(S(q), \tilde{C}_*(X)^q)$ est égale à l'application induite en homologie par α^{pq}.

On supposera que X est un C.W.complexe, le cas général se ramenant immédiatement à cette situation. Choisissons, pour définir le produit . de $S_*(X)$, une application continue g de X dans $\mathbb{R}^+$ qui ne s'annule qu'au point base de X. On désignera par f_1 l'application de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$f_1\left(\Sigma \lambda_i e_i\ ,\ \varepsilon\right) = \left(\varepsilon \cdot e_o + \Sigma \lambda_i e_{i+1}\right)$$

Soit h_1 l'application définie par :

$$h_1(x_1,t_1;\ldots;x_p,t_p;x'_1,t'_1;\ldots;x'_q,t'_q) =$$

$$(x_1, f_1(t_1, g(x_1)); \ldots; x_p, f_1(t_p, g(x_p)); x'_1, f_1(t'_1, -g(x'_1)); \ldots; x'_q, f_1(t'_q, -g(x'_q)))$$

On vérifie que h_1 est homotope par une homotopie compatible avec l'action de $S(p) \times S(q)$, à l'application h'_1 définie par :

...

$$h'_1(x_1,t_1;\ldots;x_p,t_p;x'_1,t'_1;\ldots;x'_q,t'_q) =$$

$$(x_1,f_1(t_1,1);\ldots;x_p,f_1(t_p,1;x'_1,f_1(t'_1,-1);\ldots;x'_q,f_1(t'_q,-1))$$

Comme h_1 induit par passage au quotient le produit . de $S_p(X) \times S_q(X)$ dans $S_{p+q}(X)$, le produit de $((\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times X'^p/A'_p)/S(p) \times ((\mathbb{R}^\infty)^q \times X'^q/A'_q)/S(q)$ dans $((\mathbb{R}^\infty)^{(p+q)} \times X'^{p+q}/A'_{p+q})/S(p+q)$, est homotope à l'application définie par passage au quotient de l'application h''_1 de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times X'^p \times (\mathbb{R}^\infty)^{(q)} \times X'^q$ dans $(\mathbb{R}^\infty)^{(p+q)} \times X'^{p+q}$ définie par :

$$h''_1(t_1,\ldots,t_p;x_1,\ldots,x_p;t'_1,\ldots,t'_q;x'_1,\ldots,x'_q) =$$

$$(f_1(t_1,1),\ldots,f_1(t_p,1),f_1(t'_1,-1),\ldots,f_1(t'_q,-1);x_1,\ldots,x_p,x'_1,\ldots,x'_q$$

On montre alors aisément la propriété.

2.2. L'algèbre $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n),\widetilde{C}_*(X)^n)$.

Soit $\widetilde{H}_*(X,k)$ l'homologie du complexe $\widetilde{C}_*(X)$. $\varphi_{p\,q}$ étant l'application définie en 2.1, on désignera par $\alpha'^{p\,q}$ l'application de $W_p \otimes \widetilde{H}_*(X,k)^p \otimes W_q \otimes \widetilde{H}_*(X,k)^q$ dans $W_{p+q} \otimes \widetilde{H}_*(X,k)^{p+q}$:

$$a \otimes b \otimes c \otimes d \to (-1)^{i\,j}\ \varphi_{p\,q}(a \otimes c) \otimes b \otimes d \quad \text{avec } \dim b = i, \dim c =$$

Les applications $\alpha'^{p\,q}$ induisent alors un produit sur le k-module gradué $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n),\widetilde{H}_*(X,k)^n)$.

Proposition 9

$\bigotimes_{n\geq 0} H_*(S(n),\widetilde{C}_*(X)^n)$ et $\bigotimes_{n\geq 0} H_*(S(n),\widetilde{H}_*(X,k)^n)$ sont deux algèbres canoniquement isomorphes.

...

Soient $\widetilde{Z}_*(X)$ le sous complexe des cycles de $\widetilde{C}_*(X)$, i l'inclusion de $\widetilde{Z}_*(X)$ dans $\widetilde{C}_*(X)$, et p la projection de $\widetilde{Z}_*(X)$ sur $\widetilde{H}_*(X,k)$. Si l'on munit $\widetilde{H}_*(X,k)$ de la différentielle nulle, on vérifie que i et p sont deux morphismes de complexes.

Soit s une section de l'application i. p o s est alors un morphisme de complexe de $\widetilde{C}_*(X)$ dans $\widetilde{H}_*(X,k)$ qui induit un isomorphisme en homologie. De plus, on vérifie que si s' est une autre section de i, p o s' est homotope à p o s.

Soit ξ l'application de $W_n \otimes \widetilde{C}_*(X)^n$ dans $W_n \otimes \widetilde{H}_*(X,k)^n$ induite par p o s. Les différentielles de W_n, $\widetilde{C}_*(X)^n$ et $\widetilde{H}_*(X,k)^n$ induisent deux différentielles sur $W_n \otimes \widetilde{C}_*(X)^n$ et sur $W_n \otimes \widetilde{H}_*(X,k)^n$. On en déduit donc deux suites spectrales associées à $W_n \otimes \widetilde{C}_*(X)^n$ et à $W_n \otimes H_*(X,k)^n$, et l'on vérifie que ξ induit un isomorphisme sur les premiers termes de ces suites spectrales. Il en résulte que ξ induit un isomorphisme en homologie.

D'autre part, il est clair que ξ est compatible avec les produits définis sur $\bigoplus_{n\geq 0} W_n \otimes \widetilde{C}_*(X)^n$ et sur $\bigoplus_{n\geq 0} W_n \otimes \widetilde{H}_*(X,k)^n$.

Pour montrer la proposition, il reste donc à montrer que l'application induite par ξ en homologie est indépendante du choix de la section s, et ceci résulte du lemme suivant dû à Steenrod [26] :

Lemme.

Soient P et Q deux modules différentiels gradués et f_o et f_1 deux morphismes de complexes homotopes de P dans Q. Soit Γ un groupe de permutation de degré n et W un Γ - module différentiel gradué libre acyclique. Alors les morphismes de complexes $W \underset{\Gamma}{\otimes} f_o^n$ et $W \underset{\Gamma}{\otimes} f_1^n$ de $W \underset{\Gamma}{\otimes} P^n$ dans $W \underset{\Gamma}{\otimes} Q^n$ sont homotopes.

...

Soit J le complexe de chaîne de l'intervalle I. Comme f_o et f_1 sont homotopes, il existe un morphisme de complexe F de $J \otimes P$ dans Q tel que :

$$\forall x \in P, \quad F(0 \otimes x) = f_o(x) \quad F(1 \otimes x) = f_1(x)$$

Soit alors $g : W \otimes J \to W \otimes J^n$ un morphisme de complexe Γ - équivariant tel que :

$$\forall w \in W, \; g(w \otimes 0) = w \otimes 0^n \quad g(w \otimes 1) = w \otimes 1^n$$

Alors l'homotopie entre $W \underset{\Gamma}{\otimes} f_o$ et $W \underset{\Gamma}{\otimes} f_1$ est donnée par la composition des applications Γ - équivariantes suivantes :

$$J \otimes W \otimes P^n \xrightarrow{\sim} W \otimes J \otimes P^n \xrightarrow{g \otimes P^n} W \otimes J^n \otimes P^n \xrightarrow{\sim} W \otimes (J \otimes P)^n \xrightarrow{W \otimes F^n} W \otimes Q^n$$

Soient n et i deux entiers. On désignera par $k^{(i)}$ le corps k muni de l'action de S(n) suivante :

$$\sigma \in S(n), \; t \in k \Rightarrow \sigma \cdot t = (\mathrm{Sgn}\,\sigma)^i \, t$$

$\varphi_{p\,q}$ étant l'application de $W_p \otimes W_q$ dans W_{p+q} définie au 2.1, on désignera par $\alpha''^{p\,q}$ l'application de $W_p \otimes k^{(i)} \otimes W_q \otimes k^{(i)}$ dans $W_{p+q} \otimes k^{(i)}$:

$$a \otimes b \otimes c \otimes d \to \varphi_{p\,q}(a \otimes c) \otimes b\,d$$

Les applications $\alpha''^{p\,q}$ induisent alors une structure d'algèbre sur $\bigoplus_{n \geq 0} \tilde{H}_*(S(n), k^{(i)})$, et l'on vérifie la formule :

$$\alpha \in H_\lambda(S(p), k^{(i)}), \; \beta \in H_\mu(S(q), k^{(i)}) \Rightarrow \beta \cdot \alpha = (-1)^{\lambda\,\mu + p\,q\,i} \alpha \cdot \beta$$

Les éléments de $H_\lambda(S(p), k^{(i)})$ seront dits de dimension λ et de rang p.

Soit u un élément de $\tilde{H}_i(X, k)$ et α un élément de $H_j(S(n), k^{(i)})$

...

représenté par un élément α' de W_n. $\alpha' \otimes u^n$ induit alors un élément de $H_{n\,i+j}(S(n), \widetilde{H}_*(X,k)^n)$ indépendant du choix de α'. Cet élément sera noté $\alpha \mid u$. On vérifie la formule suivante :

$$u \in H_i(X,k), \alpha \in H_\lambda(S(p), k^{(i)}), \beta \in H_\mu(S(q), k^{(i)}) \Rightarrow (\alpha.\beta)\mid u = (-1)^{p\,i\,\mu}\alpha \mid u.\beta \mid$$

Soit E un ensemble gradué par une application notée dim de E dans $\mathbb{N}$. On désignera par $U^{(i)}(E)$ la k-algèbre unitaire graduée engendrée par E et soumise aux relations :

$$\forall x, y \in E \quad x.y = (-1)^{\lambda\,\mu + i}\, y.x \quad \text{avec : } \lambda = \dim x,\ \mu = \dim y$$

$U^{(i)}(E)$ sera appelée la $k^{(i)}$-algèbre commutative libre engendrée par E.

$U^{(0)}(E)$ sera également notée U (E) et appelée la k-algèbre commutative libre engendrée par E.

Proposition 10.

Si $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n), k^{(i)})$ est la $k^{(i)}$-algèbre commutative libre engendrée par un ensemble gradué $\{\alpha^i_j\}_{j \in J_i}$, les éléments α^i_j étant de rang impair si la caractéristique de k est différente de 2, et si $\{u_l\}$ est une base de $\widetilde{H}_*(X,k)$, u_l étant de dimension d_l, $\bigoplus_{n\geq 0} \widetilde{H}_*(S(n), \widetilde{H}_*(X,k)^n)$ est la k-algèbre commutative libre engendrée par l'ensemble $\{\alpha_j^{d_l} \mid u_l\}$.

Soit U la k-algèbre commutative libre engendrée par l'ensemble $\{\alpha_j^{d_l} \mid u_l\}$. Comme $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n), \widetilde{H}_*(X,k)^n)$ est une k-algèbre commutative, on en déduit un morphisme de k-algèbre φ de U dans $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n), \widetilde{H}(X,k))$. Nous allons montrer que φ est un isomorphisme.

...

Soit n un entier positif ou nul. La base $\{u_l\}$ de $\widetilde{H}_*(X,k)$ induit une base de $\widetilde{H}_*(X,k)^n$ notée Ω_n. On désignera par Ω'_n l'ensemble $\Omega_n \cup(-\Omega_n)$. Il est clair que l'opération de S (n) sur $\widetilde{H}_*(X,k)^n$ induit une opération de S (n) sur Ω'_n. Si x est un élément de Ω'_n, on désignera par O'(x) l'orbite de x sous l'action de S (n), et par O(x) l'ensemble O'(x) $\cup$(-O' (x)), et l'on notera $\mathfrak{H}_n$ l'ensemble, pour tous les éléments x de Ω'_n, des parties O(x) de Ω'_n.

Si θ est un élément de $\mathfrak{H}_n$, on désignera par E (θ) le sous k-module de $\widetilde{H}_*(X,k)^n$ engendré par les éléments de θ. On vérifie la formule :

$$H_*(S(n),\widetilde{H}_*(X,k)^n) = \bigoplus_{\theta \in \mathfrak{H}_n} H_*(S(n),E(\theta))$$

Choisissons un ordre total sur l'ensemble d'indices de la base $\{u_l\}$ de $\widetilde{H}_*(X,k)$. Si θ est un élément de $\mathfrak{H}_n$ il existe un seul élément x de θ de la forme :

$$x = u_{l_1}^{\lambda_1} \otimes u_{l_2}^{\lambda_2} \otimes \dots \otimes u_{l_p}^{\lambda_p}$$

avec : $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = n$

$$\forall j \in \{1,\dots,p\} \quad \lambda_j > 0$$

$$l_1 < l_2 < \dots < l_p$$

Soient G le sous groupe de S (n), ensemble des substitutions σ telles que $\sigma \cdot x$ soit au signe près égal à x, et F le k-module engendré par x. On vérifie que l'on a :

$$H_*(S(n), E(\theta)) = H_*(G, F)$$

Or G est égal au produit $S(\lambda_1) \times S(\lambda_2) \times \dots \times S(\lambda_p)$

...

On a donc :

$$H_*(S(n), E(\theta)) = H_*(S(\lambda_1), F_{l_1}^{\lambda_1}) \otimes \ldots \otimes H_*(S(\lambda_p), F_{l_p}^{\lambda_p})$$

F_l étant le k-module engendré par u_l .

De plus, il est clair que si $a_1, \ldots, a_p$ sont des éléments de $H_*(S(\lambda_1), F_{l_1}^{\lambda_1}), \ldots, H_*(S(\lambda_p), F_{l_p}^{\lambda_p})$, $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_p$ considéré comme élément de $H_*(S(n), E(\theta))$ n'est autre que $a_1 \cdot a_2 \cdots a_p$.

Soient l et λ deux entiers. $H_*(S(\lambda), F_l^{\lambda})$ est isomorphe en tant que k-module à $H_*(S(\lambda), k^{(d_l)})$. Désignons par i l'entier d_l . Si l'on choisit sur J_i un ordre total, $H_*(S(\lambda), k^{(i)})$ possède une base formée par les éléments de la forme :

$$(\alpha^i_{j_1})^{\mu_1} \cdot (\alpha^i_{j_2})^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot (\alpha^i_{j_q})^{\mu_q}$$

avec : $\mu_1 \, r\,g\, \alpha^i_{j_1} + \mu_2 \, r\,g\, \alpha^i_{j_2} + \ldots + \mu_q \, r\,g\, \alpha^i_{j_q} = \lambda$,

$$\forall t \in \{1, \ldots, q\}, \mu_t > 0$$

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_q$$

et si la caractéristique de k est différente de 2 :

$$\forall t \in \{1, \ldots, q\} \quad \dim \alpha^i_{j_t} + i \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow \mu_t = 1$$

Il en résulte que $H_*(S(\lambda), F_l^{\lambda})$ possède une base formée par les éléments de la forme :

$$[(\alpha^i_{j_1})^{\mu_q}] \mid u_l$$

avec les mêmes conditions pour j_t et μ_t que ci-dessus.

...

Or on a :

$$[\,(\alpha^i_{j_1})^{\mu_1}.\ \ldots\ .(\alpha^i_{j_q})^{\mu_q}\,] \mid u_1 = \epsilon\,(\alpha^i_{j_1} \mid u_1)^{\mu_1}.\ \ldots\ .(\alpha^i_{j_q} \mid u_1)^{\mu_q}$$

ϵ étant égal à 1 ou à -1 .

On en déduit que $H_*(S(\lambda), F^\lambda_1)$ possède une base formée par les éléments de la forme :

$$(\alpha^i_{j_1} \mid u_1)^{\mu_1}.\ \ldots\ .(\alpha^i_{j_q} \mid u_1)^{\mu_q}$$

avec : $\mu_1\ r\,g\,\alpha^i_{j_1} + \ldots + \mu_q\ r\,g\,\alpha^i_{j_q} = \lambda$

$$\forall\, t \in \{1, \ldots, q\}\ \ \mu_t > 0$$

$$j_1 < j_2 \ldots < j_q$$

et si la caractéristique de k est différente de 2 :

$$\forall\ t \in \{1,\ldots,q\}\ \dim(\alpha^i_{j_t} \mid u_1) \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow \mu_t = 1$$

Si l'on munit l'ensemble $\{\alpha^{d_1}_j \mid u_1\}$ de l'ordre lexicographique sur le couple $(1,j)$, on obtient un ensemble ordonné $\{v_\lambda\}$ et l'on vérifie que $\oplus H_*(S(n), \widetilde{H}_*(X,k)^n)$ possède une base formée par les éléments :

$$v^{\nu_1}_{\lambda_1} \cdot v^{\nu_2}_{\lambda_2} \cdot \ \ldots\ \cdot v^{\nu_r}_{\lambda_r}$$

avec : $r \geq 0$

$$\forall\ t \in \{1,\ldots,r\},\quad \nu_t > 0$$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$$

et si la caractéristique de k est différente de 2 :

$$\forall\ t \in \{1,\ldots,r\}\ \dim v_{\lambda_t} \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow \nu_t = 1$$

...

Il en résulte que φ est un isomorphisme et la proposition est démontrée.

§ 3 - Détermination de $H_*(\wedge X, \mathbb{Q})$ et de $\widetilde{H}_*(S_*(X), \mathbb{Q})$

Dans ce paragraphe, on supposera que k est le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels

3.1. Détermination de l'algèbre $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n), \widetilde{H}_*(X,\mathbb{Q})^n)$

Proposition 11.

$\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n), \mathbb{Q}^{(i)})$ est la $\mathbb{Q}^{(i)}$-algèbre commutative libre engendrée par le générateur canonique de $H_o(S(1), \mathbb{Q}^{(i)})$.

Soit A_n le sous-groupe des substitutions paires de S (n). Comme S (n) et A_n sont finis, on en déduit :

$$i > 0 \Rightarrow H_i(S(n), \mathbb{Q}) = H_i(A_n, \mathbb{Q}) = 0$$

$$H_o(S(n), \mathbb{Q}) = H_o(A_n, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

Considérons la suite exacte :

$$0 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0$$

La deuxième flèche est l'application $a \to (a, -a)$ et la troisième est la somme.

Or, S (n) opère sur $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ de la façon suivante :

$$\sigma(a, b) = \begin{cases} (a,b) & \text{si } \operatorname{sgn}\sigma = 1 \\ (b,a) & \text{si } \operatorname{sgn}\sigma = -1 \end{cases}$$

On a ainsi une suite exacte de S(n)-modules

$$0 \to \mathbb{Q}^{(1)} \to \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to 0$$

...

On en déduit la suite exacte suivante, si n est supérieur ou égal à 2 :

$$H_*(S(n), \mathbb{Q}^{(1)}) \longrightarrow H_*(A_n, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_*(S(n), \mathbb{Q})$$

On en déduit que $H_*(S(n), \mathbb{Q}^{(1)})$ est nul si n est supérieur ou égal à 2.

Soit e le générateur canonique de $H_o(S(1), \mathbb{Q}^{(i)})$. On vérifie alors que $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), \mathbb{Q})$ est égal à l'algèbre polynominale $\mathbb{Q}[e]$, et que $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), \mathbb{Q}^{(1)})$ est égal à l'algèbre extérieure $\mathbb{Q}[e]/\, e^2\mathbb{Q}[e]$.

On vérifie alors aisément la proposition.

Proposition 12.

$\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), \widetilde{H}_*(X, \mathbb{Q})^n)$ est la $\mathbb{Q}$-algèbre commutative libre engendrée par $\widetilde{H}_*(X, \mathbb{Q})$.

Cela résulte immédiatement des propositions 10 et 11.

3.2. Détermination de l'hypermodule $\widetilde{H}_*(S_*(X), \mathbb{Q})$

Proposition 13.

$\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), \mathbb{Q})$ est égal au $\mathbb{Q}$- espace vectoriel engendré par les éléments e^n de dimension 0 et de rang n, $n \geq 0$, et les opérations sur $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), \mathbb{Q})$ sont les suivantes :

...

$$\Delta\ e^n = e^n \otimes e^n$$

$$e^p \cdot e^q = e^{p+q}$$

$$e^p \times e^q = e^{pq}$$

La démonstration est évidente.

Théorème 1.

$\tilde{H}_*(S_*(X),\mathbb{Q})$ est l'hypermodule gradué sur $\oplus_{n>0} \tilde{H}_*(S_n(S^\circ),\mathbb{Q})$ engendré par la coalgèbre graduée $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q})$.

Il est clair que la $\mathbb{Q}$- algèbre $\tilde{H}_*(S_*(X),\mathbb{Q})$ est la $\mathbb{Q}$-algèbre commutative libre engendrée par $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q})$. Comme $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q})$ est une coalgèbre, l'application diagonale se prolonge de façon unique à $\tilde{H}_*(S_*(X),\mathbb{Q})$ et $\tilde{H}_*(S_*(X),\mathbb{Q})$ est la $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf commutative engendrée par la coalgèbre $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q})$. D'autre part, le produit $\times$ de $\oplus_{n>0} \tilde{H}_*(S_n(S^\circ);\mathbb{Q}) \otimes \tilde{H}_*(S_*(X),\mathbb{Q})$ dans $\tilde{H}_*(S_*(X),\mathbb{Q})$ est distributif par rapport au produit $\cdot$, il est donc parfaitement connu. On montre alors aisément le théorème.

3.3. Détermination de l'hypermodule $H_*(\wedge X,\mathbb{Q})$.

Théorème 2.

Soit a la classe de $H_*(X,\mathbb{Q})$ définie par le point base de X. Alors, $H_*(\wedge X,\mathbb{Q})$ est l'hypermodule gradué sur $H_*(\wedge S^\circ,\mathbb{Q})$ engendré par la coalgèbre $H_*(X,\mathbb{Q})$ et soumis à la relation : $a = 1$.

Théorème 3.

Soient $\epsilon : H_*(X,\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ la counité de la coalgèbre

...

$H_*(X,\mathbb{Q})$ et $u \to \bar{u}$ la projection canonique de $H_*(X,\mathbb{Q})$ sur $\tilde{H}_*(X,\mathbb{Q})$. Alors ρ_* est le morphisme d'algèbre défini par :

$$u \in H_*(X,\mathbb{Q}) \Rightarrow \rho_*(u) = \varepsilon(u)\,1 + \bar{u}$$

Nous allons démontrer ces théorèmes simultanément.

Soit i l'inclusion canonique de X dans $\wedge X$ et i_p l'inclusion de $\wedge_p X$ dans $\wedge X$. On désignera également par g_p la projection canonique de $\wedge_p X$ sur $S_p(X)$. On a alors le diagramme commutatif suivant : (voir III 3.4)

$$\begin{array}{ccc} H_*(\wedge X, \mathbb{Q}) & & \\ \uparrow{\scriptstyle i_p} & \searrow^{\rho_{*p}} & \\ H_*(\wedge_p X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow[g_{p*}]{} & \tilde{H}_*(S_p(X),\mathbb{Q}) \end{array}$$

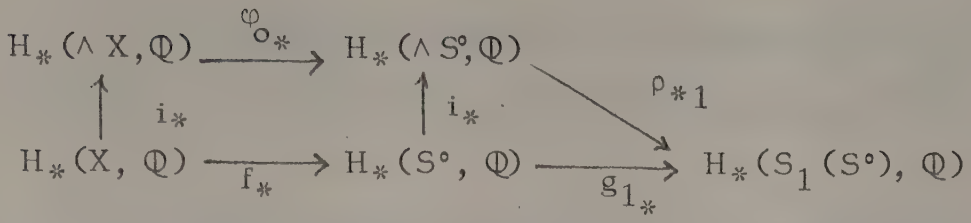
On en déduit immédiatement que si p est supérieur ou égal à 2 $\rho_{*p} \circ i_*$ est nul et que si p est égal à 1, $\rho_{*p} \circ i$ est égal à l'application induite en homologie par l'inclusion canonique de X dans $S_*(X)$.

Si p est nul, $S_p(X)$ est égal à la sphère S° de dimension 0. Soit s le point de S° différent du point base, f la projection de X sur s et φ_o l'application de $\wedge X$ dans $\wedge S^\circ X$ définie au III 3.3. On vérifie alors que le diagramme suivant est homotopiquement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \wedge X & \xrightarrow{\varphi_o} & \wedge S^\circ \\ \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ X & \xrightarrow{f} & S^\circ \end{array}$$

...

On a alors le diagramme commutatif suivant :



On vérifie alors que l'on a :

$$\rho_{*\,o}\ \circ i_* = g_{1*}^{-1} \circ \rho_{*1} \circ \varphi_{o*} \circ i_* = f_*$$

Il en résulte que si u est un élément de $H_*(X,\mathbb{Q})$ considéré comme sous-module de $H_*(\wedge X,\mathbb{Q})$, on a :

$$\rho_*(u) = \varepsilon(u)\,1 + \bar{u}$$

Comme ρ_* est un isomorphisme d'algèbres, on en déduit :

$$\rho_*(a) = 1 \Rightarrow a = 1$$

Soit A_* l'algèbre commutative graduée engendrée par $H_*(X,\mathbb{Q})$ et quotientée par la relation : a = 1. Comme $H_*(\wedge X,\mathbb{Q})$ est une algèbre graduée commutative, on en déduit un unique morphisme d'algèbre φ de A_* dans $H_*(\wedge X,\mathbb{Q})$ prolongeant i_*.

Pour montrer que φ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $\rho_* \circ \varphi$ est un isomorphisme.

Soit ψ le morphisme d'algèbre de $\widetilde{H}_*(S_*(X)\,\mathbb{Q})$ dans A_* défini par :

$$\forall u \in H_*(X,\mathbb{Q})\quad \psi(\bar{u}) = u - \varepsilon(u)\,.\,a$$

On vérifie immédiatement que ψ est l'inverse de $\rho_* \circ \varphi$. φ est donc un isomorphisme, et l'on montre aisément les deux théorèmes.

...

§ 4 - Homologie modulo p des groupes symétriques

Ce paragraphe s'inspire essentiellement des travaux de Nakaoka sur l'homologie du groupe symétrique infini [20].

4.1. Le "wreath product" de deux groupes de permutations.

Soient $\Lambda \subset S(l)$ et $\Gamma \subset S(m)$ deux groupes de permutations. Le "wreath product" $\Gamma \mid \Lambda \subset S(lm)$ est définit comme suit (voir [20] et [26]) :

Si γ est un élément de Γ on définit $\overline{\gamma} \in S(lm)$ par :

$$1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq l \Rightarrow \overline{\gamma}((i-1)l + j) = (\gamma(i)-1)l + j$$

Si λ est un élément de Λ et si k est un entier de $\{1,\ldots,m\}$ on définit $\lambda^{(k)} \in S(lm)$ par :

$$\begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq l \end{matrix} \Rightarrow \lambda^{(k)}((i-1)l+j) = \begin{cases} (i-1)l + \lambda(j) & \text{si } i = k \\ (i-1)l + j & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

Alors, par définition, $\Gamma \mid \Lambda$ est le sous-groupe de S(lm) engendré par tous les éléments $\overline{\gamma}$ et $\lambda^{(k)}$ de S(lm).

On vérifie que $\Gamma \mid \Lambda$ est le produit semi-direct de Γ par Λ^m, l'opération de Γ sur Λ^m étant évidente.

Soient M un Γ - module différentiel gradué libre acyclique et L un Λ - module différentiel gradué libre acyclique. L^m est un Γ-module différentiel gradué. Faisons opérer $\Gamma \mid \Lambda$ sur $M \otimes L^m$ de la façon suivante :

$$\gamma(\tau \otimes \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_m) = \gamma(\tau) \otimes \gamma(\sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_m)$$

$$\lambda^{(k)}(\tau \otimes \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_m) = \tau \otimes \sigma_1 \otimes \ldots \otimes \lambda(\sigma_k) \otimes \ldots \otimes \sigma_m$$

...

On vérifie que $M \otimes L^m$ est alors un $\Gamma|\wedge$-module différentiel gradué libre acyclique, et l'on montre, par une méthode similaire à la méthode utilisée pour la démonstration de la proposition 9, la proposition suivante :

Proposition 14.

$H_*(\Gamma|\wedge, k)$ est canoniquement isomorphe à $H_*(\Gamma, H_*(\wedge, k)^m)$.

Si u est un élément de $H_j(\Gamma, k^{(i)})$ et v un élément de $H_i(\wedge, k)$ on désignera par u|v l'élément de $H_{m\,i+j}(\Gamma|\wedge, k)$ représenté en homologie par $u' \otimes v^m$, u' étant un représentant de u dans M.

4.2. Homologie modulo p des p-sous-groupes de Sylow des groupes symétriques.

Dorénavant, et dans toute la suite, on supposera que p est un nombre premier et k le corps premier de caractéristique p.

Soit t la substitution de S(p) définie par :

$$1 \leq i \leq p \Rightarrow t(i) = \begin{cases} i+1 & \text{si } i \neq p \\ 1 & \text{si } i = p \end{cases}$$

On désignera par Π le sous-groupe de S(p) engendré par t.

On définit alors le sous-groupe $S(p^r, p)$ de $S(p^r)$ par :

$$S(p^0, p) = (1)$$
$$S(p^r, p) = \Pi \mid S(p^{r-1}, p)$$

Soit $\sum_r a_r p^r$ l'écriture p-adique d'un entier m. Tout p-sous-groupe de Sylow de S(m) est isomorphe à $\prod_r S(p^r, p)^{a_r}$ (voir [26

...

Pour étudier l'homologie des p-sous-groupes de Sylow des groupes symétriques, il suffit donc d'étudier l'homologie des groupes $S(p^r, p)$.

Désignons par W le Π - module différentiel gradué libre engendré en dimension i par l'élément e_i, l'opérateur bord d étant donné par :

$$d\ e_i = T_i\ e_{i-1}$$

avec :

$$T_{2i} = 1 + t + \ldots + t^{p-1}$$

$$T_{2i+1} = 1 - t$$

Par raison de commodité, on conviendra que e_i est nul si i est négatif.

Il est clair que W est acyclique.

Soit H un k-module gradué. Π opère par permutation sur H^p ; nous allons étudier $H_*(\Pi, H^p)$.

Soit u un élément de H. On désignera par $e_i \mid u$ l'élément de $H_*(\Pi, H^p)$ induit par $e_i \otimes u^p$.

Proposition 15.

Soit $\{a_j\}$ une base homogène de H. Alors, $H_*(\Pi, H^p)$ est un k-module gradué engendré par les éléments :

$$e_i \mid a_j$$

$$e_o \otimes a_{j_1} \otimes \ldots \otimes a_{j_p}.$$

La base $\{a_j\}$ de H induit une base de H^p notée Ω. On désignera par Ω' l'ensemble $\Omega \cup (-\Omega)$. Il est clair que Π opère sur Ω'.

...

Si x est un élément de Ω', ondésignera par $0'(x)$ l'orbite de x sous l'action de Π, et par $0(x)$ l'ensemble $0'(x) \cup (-0'(x))$, et l'on notera Θ l'ensemble, pour tous les éléments x de Ω', des parties $0(x)$ de Ω'.

Si θ est un élément de Θ, on désignera par $E(\theta)$ le sous-module de H^p engendré par les éléments de θ. On a alors :

$$H_*(\Pi, H^p) = \bigoplus_{\theta \in \Theta} H_*(\Pi, E(\theta))$$

Soit x un élément de θ. Désignons par G le sous-groupe de Π, ensemble des substitutions σ de Π telles que $\sigma . x$ soit, au signe près, égal à x, et par F le sous k-module engendré par x. On a :

$$H_*(\Pi, E(\theta)) = H_*(G, F)$$

Si G est égal à Π, x est de la forme : $(a_j)^p$, et $H_*(\Pi, E(\theta))$ est engendré par les éléments $e_i | a_j$, $i \geq 0$.

Si G est égal à (1), x est de la forme $a_{j_1} \otimes \ldots \otimes a_{j_p}$ et $H_*(\Pi, E(\theta))$ est engendré par $e_o \otimes a_{j_1} \otimes \ldots \otimes a_{j_p}$, et la proposition est démontrée.

Soit $J = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$ une suite d'entiers positifs ou nuls. On désignera par $e(J)$ l'élément de $H_*(S(p^r, p), k)$ défini par récurrence de la façon suivante :

$$e(J) = e(j_1, j_2, \ldots, j_r) = e_{k_1} | e(j_2, \ldots, j_r)$$

avec :

$$k_1 = j_1 - (p-1)(j_2 + \ldots + j_r)$$

et :

$$e(\emptyset) = 1$$

...

Toutes les substitutions de $S(p^r,p)$ sont paires si p est différent de 2 ; on en déduit que $H_*(S(p^r;p),k)$ est égal à $H_*(S(p^r,p),k^{(i)})$. Soit σ l'inclusion de $S(p^r,p)$ dans $S(p^r)$. σ induit alors une application $\sigma_*^{(i)}$ de $H_*(S(p^r,p),k)$ dans $H_*(S(p^r),k^{(i)})$.

On posera :

$$a^{(i)}(J) = a^{(i)}(j_1,\ldots,j_r) = \sigma_*^{(i)}(e(J))$$

Nous allons montrer que les éléments $a^{(i)}(J)$ engendrent l'algèbre $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n),k^{(i)})$.

4.3. Générateurs de l'algèbre $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(S(n),k^{(i)})$.

Désignons par $A'(n)$ le sous-groupe de $S(n)$ égal à $S(n)$ si p est égal à 2 et à l'ensemble des substitutions paires de $S(n)$ si p est impair.

On vérifie que si Λ est un sous-groupe de $A'(l)$ et Γ un sous-groupe de $A'(m)$, $\Gamma \mid \Lambda$ est un sous-groupe de $A'(lm)$. De plus, si φ est l'inclusion de $S(l) \times S(m)$ dans $S(l+m)$ définie au 2.1, $\varphi(A'(l)\times A'(m$ est inclus dans $A'(l+m)$ et $\bigoplus_{n\geq 0} H_*(A'(n),k) = \bigoplus_{n\geq 0} H_*(A'(n),k^{(i)})$ est une k-algèbre.

Lemme.

Soient u un élément de $H_*(A'(l),k)$ et v un élément de $H_*(A'(m),k)$. Alors, si σ désigne l'inclusion de tout sous groupe de $A'(n)$ dans $A'(n)$, $\sigma_*(e_j \mid (u.v))$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $\sigma_*(e_\lambda \mid u).\sigma_*(e_{j-\lambda} \mid v)$.

...

Soit W_1 (resp. W_m) un $A'(l)$- (resp. $A'(m)$-) module différentiel gradué libre acyclique. L'application canonique de $(A'(l) \times A'(m))^p$ dans $A'(l)^p \times A'(m)^p$ et l'application diagonale de Π dans $\Pi \times \Pi$ induisent une application f de $\Pi|\varphi(A'(l) \times A'(m))$ dans $\Pi|A'(l) \times \Pi|A'(m)$.

Soit alors :

$$f_* : W \otimes (W_l \otimes W_m)^p \to W \otimes W_l^p \otimes W \otimes W_m^p$$

l'application compatible avec f définie à l'aide d'une application diagonale Δ de $W \otimes W$ et des permutations nécessaires. On a :

$$f(e_j \otimes (u \otimes v)^p) = \sum_\lambda \alpha_\lambda \; e_\lambda \otimes u^p \otimes e_{j-\lambda} \otimes v^p$$

α_λ étant un élément de $k[\Pi]$.

Or, on vérifie que l'application $\varphi \circ f$ de $\Pi|\varphi(A'(l) \times A'(m))$ dans $A'(pl+pm)$ est conjuguée à l'inclusion par un automorphisme intérieur. On montre alors aisément le lemme.

Proposition 16.

$\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), k^{(i)})$ est engendrée, en tant qu'algèbre, par les éléments $a^{(i)}(J)$, J parcourant l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathbb{N}$.

Comme $A'(n)$ est un sous-groupe de $S(n)$ d'indice premier à p, le morphisme d'algèbre $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(A'(n), k^{(i)})$ dans $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), k^{(i)})$ est surjectif. Pour montrer la proposition, il suffit alors de vérifier que, si σ désigne l'inclusion de $S(n,p)$ dans $S(n)$, $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(A'(n), k)$ est engendrée, en tant qu'algèbre, par les éléments $\sigma_*(e(J))$.

...

Désignons par A_* la sous-algèbre de $\oplus_{n \geq 0} H_*(A'(n),k)$ engendrée par les éléments $\sigma_*(e(J))$ et supposons, par récurrence, que pour tout entier q strictement inférieur à n, $H_*(A'(q),k)$ est contenu dans A_*. Comme l'application σ_* de $H_*(S(n,p),k)$ dans $H_*(A'(n),k)$ est surjective, et que $S(n,p)$ se décompose en produit de groupes $S(q,p)$ avec $q < n$, si n n'est pas une puissance de p, il est clair que $H_*(A'(n),k)$ est inclus dans A_* dans ce cas. Si n est égal à p^r, on vérifie, grâce à la proposition 15, que $H_*(A'(n),k)$ est engendré par $\sigma_*(e_j|u)$ et $\sigma_*(e_o \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_p)$, j parcourant $\mathbb{N}$, et $u, u_1, \ldots, u_p$ parcourant une base de $H_*(A'(p^{r-1}),k)$.

Or, on vérifie que $\sigma_*(e_o \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_p)$ est égal à $u_1 . u_2 . \ldots . u_p$ et appartient à A_* et, comme il existe, d'après l'hypothèse de récurrence, une base de $H_*(A'(p^{r-1}),k)$ formée d'éléments de la forme :

$$u = \sigma_*(e(J_1)) . \sigma_*(e(J_2)) . \ldots . \sigma_*(e(J_l))$$

on montre, grâce au lemme précédent, que $\sigma_*(e_j|u)$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme :

$$v = \sigma_*(e(J'_1)) . \sigma_*(e(J'_2)) . \ldots . \sigma_*(e(J'_l))$$

et, par conséquent que $\sigma_*(e_j|u)$ appartient à A_*. Il en résulte que $H_*(A'(n),k)$ est inclus dans A_* et la proposition est démontrée.

4.4. Relations avec les puissances réduites.

Soient X le complexe de chaîne d'un complexe simplicial et Γ un groupe de permutations de degré n. Alors, si u est un élément

...

de $H^q(X,k)$ et si c est un élément de $H_j(\Gamma, k^{(q)})$, la puissance réduite u^n/c est un élément de $H^{nq-j}(X,k)$ (voir [25]).

Proposition 17.

Soient a un élément de $H_i(S(l),k^{(q)})$, b un élément de $H_j(S(m),k^{(q)})$ et u un élément de $H^q(X,k)$. On a alors la formule :

$$u^{l+m}/(a.b) = (-1)^{j(i+lq)}\, u^l/a.u^m/b$$

le produit dans le terme de droite étant le cup produit.

Proposition 18.

Soient $\wedge$ et Γ deux groupes de permutations de degrés respectifs l et m, tels que toutes les substitutions de $\wedge$ soient paires si p est impair. Alors, si u est un élément de $H^q(X,k)$, a un élément de $H_i(\wedge,k) = H_i(\wedge,k^{(q)})$ et b un élément de $H_j(\Gamma,k^{(ql-i)})$, on a la formule :

$$u^{lm}/(b \mid a) = (-1)^{\epsilon}(u^l/a)^m/b$$

avec :

$$\epsilon = \frac{m(m-1)}{2}\, i + m\, i\, j + \frac{m(m-1)}{2}\, liq$$

Ces deux propositions résultent assez simplement de la définition des puissances réduites.

Soit St^i l'opération cohomologique de degré i définie par :

$$St^i = \begin{cases} \beta^{\epsilon} \mathcal{P}^s & \text{si } i = 2s(p-1) + \epsilon \text{ avec } \epsilon = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathcal{P}^s$ étant la puissance réduite de Steenrod de degré $2s(p-1)$ et β l'homomorphisme de Bockstein.

...

On définira également les éléments c_n et ϵ_n de k par :

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2 \\ (\frac{p-1}{2})!^n (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}} & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} (-1)^{s+t} & \text{si } n = 2s(p-1) + t \text{ avec } t = 0 \text{ ou } 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si u est un élément de $H^q(X,k)$ et j un entier, on a alors la formule (voir [25]) :

$$u^p / e(j) = c_q \epsilon_i St^i u$$

avec $i = q(p-1) - j$.

Proposition 19.

Soient u un élément de $H^q(X,k)$ et $J = (j_1, \ldots, j_r)$ une suite finie d'entiers positifs ou nuls. On a la formule :

$$u^{p^r} / a^{(q)}(J) = (-1)^\alpha c_{q_1} \ldots c_{q_r} \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_r} St^{i_1} \ldots St^{i_r} u$$

avec :

$$i_t = qp^{r-t}(p-1) - j_t$$

$$q_t = q + i_{t+1} + \ldots + i_r = qp^{r-t} - (j_{t+1} + \ldots + j_r)$$

$$\alpha = \frac{p(p-1)}{2}(q+1)j' + \frac{j(j+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} rq$$

$$j = j_1 + \ldots + j_r$$

$$j' = j_2 + 2j_3 + \ldots + (r-1)j_r$$

D'après les puissances fondamentales des puissances réduites on a :

$$u^{p^r} / a^{(q)}(J) = u^{p^r} / e(J)$$

...

La proposition est alors clairement vraie si r est nul. Supposons, par récurrence, que la proposition soit démontrée pour toute suite J de longueur r-1. On a alors :

$$u^{p^r} / e(j_1, \ldots, j_r) = u^{p^r} / (e(k_1) \mid e(j_2, \ldots, j_r))$$

avec : $k_1 = j_1 - (p-1)(j_2 + \ldots + j_r)$

Il en résulte, grâce à la proposition 18 :

$$u^{p^r} / e(j_1, \ldots, j_r) = (-1)^{\epsilon} (u^{p^{r-1}} / e(j_2, \ldots, j_r))^p / e(k_1)$$

avec : $\epsilon = (j_2 + \ldots + j_r)\left(\frac{p(p-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} p^{r-1} q + p k_1\right)$

Soit :

$$u^{p^r} / e(J) = (-1)^{\epsilon + \beta} c_{q_2} \ldots c_{q_r} \epsilon_{i_2} \ldots \epsilon_{i_r} c_{q_1} \epsilon_{i_1} St^{i_1} \ldots St^{i_r} u$$

avec :

$$\beta = \frac{p(p-1)}{2}(q+1)(j_3 + \ldots + (r-2)j_r) + \frac{(j_2+\ldots+j_r)(j_2+\ldots+j_r+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2}(r-1)\,q$$

Il en résulte que la proposition est démontrée pour la suite $(j_1, \ldots, j_r)$ si p est égal à 2 ou si i_1 n'est congru ni à 0 ni à 1 modulo $2(p-1)$. Dans le cas contraire, p est impair et j_1 est congru à $q(p-1)$ ou à $q(p-1) - 1$ modulo 4. j_1^2 est alors congru à $q(p-1) - j_1$ modulo 4, et l'on vérifie dans ce cas que $\epsilon + \beta$ est congru à α modulo 2, ce qui achève de démontrer la proposition.

4.5. L'algèbre $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), k^{(i)})$.

Soit u_q le générateur canonique de $H^q(Z_p, q; Z_p)$.

Si i, j, q et n sont quatre entiers, q et i étant de même parité, on définit l'application F_q de $H_j(S(n), k^{(i)})$ dans $H^{n\,q-j}(Z_p, q\,; Z_p)$

...

par :

$$\alpha \in H_j(S(n),k^{(i)}) \Rightarrow F_q(\alpha) = (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} \cdot u_q^{\,n} / \alpha$$

F_q est alors une application de $\underset{n \geq 0}{\oplus} H_*(S(n),k^{(i)})$ dans $H^*(Z_p,q\,;\,Z_p)$.

Proposition 20.

Si j est strictement inférieur à q, l'application F_q de $H_j(S(n),k^{(i)})$ dans $H^*(Z_p,q\,;\,Z_p)$ est injective.

Désignons par $SP^n(S^q)$ le n-ième produit symétrique de la sphère S^q de dimension q et par u le générateur canonique de $H^q(SP^n(S^q),Z_p)$. Soit G l'application de $H_j(S(n),k^{(i)})$ dans $H^{nq-j}(SP^n(S^q),Z_p)$ définie par :

$$G(\alpha) = (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} u^n / \alpha$$

Enfin, on choisira une application continue f de $SP^n(S^q)$ dans $K(Z_p,q)$ telle que :

$$f^*(u_q) = u$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_j(S(n),k^{(i)}) & \xrightarrow{F_q} & H^{n\,q-j}(Z_p\,,\,q\,;\,Z_p) \\ & \searrow^{G} & \downarrow f^* \\ & & H^{n\,q-j}(SP^n(S^q)\,;\,Z_p) \end{array}$$

Or, on sait, d'après le théorème de Steenrod ([27] & [20], Part IV), que G est un isomorphisme si j est srictement inférieur à q. La proposition se montre alors aisément.

...

Proposition 21.

Soient $(j_1,\ldots,j_n)$ une suite finie d'entiers positifs ou nuls et λ un élément de $\{1,\ldots,r\}$. On a alors les relations suivantes :

(R_1) si j_λ n'est congru ni à $i(p-1)$ ni à $i(p-1)-1$ modulo $2(p-1)$, on a :

$$a^{(i)}(j_1,\ldots,j_r) = 0$$

$$(R_2)\quad j_1 < (p-1)(j_2+\ldots+j_r) \Rightarrow a^{(i)}(j_1,\ldots,j_r) = 0$$

$$(R_3)\quad \lambda < r,\ j_\lambda > p\, j_{\lambda+1} \Rightarrow$$

$$a^{(i)}(j_1,\ldots,j_r) = \sum_t (-1)^{\beta t} c_t\ X(pt-j_\lambda+p\,j_{\lambda+1},t)\ a^{(i)}(j_1,\ldots,j_\lambda-t,j_{\lambda+1}+t,\ldots,j_r)$$

avec:

$$\beta = \frac{p(p-1)}{2}(j_{\lambda+1}+\ldots+j_r)$$

$$p=2 \Rightarrow X(u,v) = \binom{v-1}{u}$$

$$p>2 \Rightarrow X(u,v) = \begin{cases} (-1)^{a-\epsilon'}\binom{(p-1)\,b-1+\epsilon''}{a-\epsilon'} & \text{si } \begin{cases} u = 2a(p-1)+\epsilon-\epsilon' p \\ v = 2b(p-1)+\epsilon'' \end{cases} \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases}$$

avec $\epsilon,\epsilon',\epsilon'' \in \{0,1\}$ et $\epsilon'.\epsilon'' = 0$

$$(R_4)\quad j_1 = (p-1)(j_2+\ldots+j_r) \Rightarrow a^{(i)}(j_1,\ldots,j_r) = [\,a^{(i)}(j_2,\ldots,j_r)\,]^p$$

D'après la proposition 20, un élément u de $H_j(S(n),k^{(i)})$ est nul si et seulement si $F_q(u)$ est nul pour q assez grand.

La relation (R_1) résulte alors du fait que St^j est nul si j n'est congru ni à 0 ni à 1 modulo $2(p-1)$, (R_2) résulte du fait que $St^j u$ est nul si j est strictement supérieur à la dimension de u, (R_3) provient des relations d'Adem (voir [1] et [28]) :

...

$$a < p\,b \Rightarrow St^a\ St^b = \sum_t X(a - p\,b + p\,t,\ t)\ St^{a+t}\ St^{b-t}$$

En effet, on a :

$$F_q(a^{(i)}(j_1, \ldots, j_\lambda - t, j_{\lambda+1} + t, \ldots, j_r)) =$$

$$(-1)^\gamma c_{q_1} \ldots c_{q_\lambda - t} \ldots c_{q_r} \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_\lambda + t}\, \epsilon_{i_{\lambda+1} - t} \ldots \epsilon_{i_r} St^{i_1} \ldots St^{i_\lambda + t}\ St^{i_{\lambda+1} - t} \ldots St^{i_r} u$$

avec :

$$\gamma = \frac{p(p-1)}{2}(q+1)(j' + t) + j + \frac{p(p-1)}{2} r\,q$$

Si $j_\lambda - t$ et $j_{\lambda+1} + t$ sont tous les deux congrus à $i(p-1)$ ou à $i(p-1) - 1$ modulo $2(p-1)$, et si $X(p\,t - j_\lambda + p\,j_{\lambda+1}, t)$ est non nul, on vérifie que : $\epsilon_{i_\lambda + t}\, \epsilon_{i_{\lambda+1} - t} = \epsilon_{i_\lambda}\, \epsilon_{i_{\lambda+1}}$

Enfin, on a :

$$c_t\, c_{q_\lambda - t} = c_{q_\lambda} (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}(q_\lambda - t)\ t} = c_{q_\lambda} (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}(i+1)\ t}\ (-1)^{\beta t}$$

On vérifie alors immédiatement la relation (R_3).

Si j_1 est égal à $(p-1)(j_2 + \ldots + j_r)$, on a :

$$F_q(a^{(i)}(j_1, \ldots, j_r)) = (-1)^\gamma c_{q_1} \ldots c_{q_r}\, \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_r}\ St^{i_1} \ldots St^{i_r} u$$

avec :

$$\gamma = \frac{p(p-1)}{2}(q+1) j' + j + \frac{p(p-1)}{2} r\,q$$

j_1 étant égal à $(p-1)(j_1 + \ldots + j_r)$ on a :

$$St^{i_1} \ldots St^{i_r} u = (St^{i_2} \ldots St^{i_r} u)^p$$

Posons alors :

$$\bar{j} = j_2 + \ldots + j_r$$

$$\bar{j'} = j_3 + 2j_4 + \ldots + (r-2) j_r$$

...

On a :

$$F_q(a^{(i)}(j_1,\ldots,j_r)) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}(q+1)\,j + \frac{p(p-1)}{2}\,q}\, c_{q_1}\,\epsilon_{i_1}\,[F_q(a^{(i)}(j_2,\ldots,j_r))$$

Grâce à la proposition 17, on vérifie que :

$$[F_q(a^{(i)}(j_2,\ldots,j_r))]^p = (-1)^{\epsilon} F_q(a^{(i)}(j_2,\ldots,j_r)^p)$$

avec :

$$\epsilon = i\,\bar{j}\; p^{r-1}\,\frac{p(p-1)}{2}$$

On a donc :

$$F_q(a^{(i)}(j_1,\ldots,j_r)) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}(\bar{j}+q)}\, c_{q_1}\,\epsilon_{i_1} F_q(a^{(i)}(j_2,\ldots,j_r)^p)$$

On vérifie que q_1 est la dimension de $F_q(a^{(i)}(j_2,\ldots,j_r))$.

Si p et q_1 sont impairs, $F_q(a^{(i)}(j_2,\ldots,j_r))^p$ est nul et l'on a :

$$a^{(i)}(j_1,\ldots,j_r) = [a^{(i)}(j_2,\ldots,j_r)]^p = 0$$

Si p est égal à deux, on montre (R_4) également.

Supposons maintenant que q_1 est pair et p impair. On a alors :

$$q_1 = 2u$$

$$\Rightarrow c_{q_1} = (-1)^{\frac{p+1}{2}u}\,(-1)^{\frac{p-1}{2}u} = (-1)^u$$

$$i_1 = q\,p^{r-1}(p-1) - j_1 = q\,p^{r-1}(p-1) - (p-1)\,\bar{j} = (p-1)\,q_1 = 2u(p-1)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{i_1} = (-1)^u$$

Soit :

$$c_{q_1}\,\epsilon_{i_1} = 1$$

D'autre part, si q_1 est pair, $\bar{j}$ et $q\cdot p^{r-1}$ ont même parité, et par conséquent $\bar{j}$ est de la parité de q. On obtient ainsi la relation (R_4)

Soit $J = (j_1,\ldots,j_r)$ une suite finie d'entiers positifs ou nuls. On dira que J est i-admissible si l'on a les propriétés suivantes :

...

i) $j_1, \ldots, j_r$ sont congrus à $i(p-1)$ ou $i(p-1)-1$ modulo $2(p-1)$

ii) $j_1 \leq pj_2$, $j_2 \leq pj_3, \ldots, j_{r-1} \leq pj_r$

iii) $j_1 > (p-1)(j_2 + \ldots + j_r)$

On a alors le théorème suivant, démontré par Nakaoka [20] dans le cas où i est pair :

Théorème 4.

$\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), k^{(i)})$ est la $k^{(i)}$-algèbre commutative libre engendrée par les éléments $a^{(i)}(J)$, J parcourant l'ensemble des suites finies i-admissibles d'entiers positifs ou nuls.

Soit A_* la $k^{(i)}$- algèbre commutative libre engendrée par les éléments $a^{(i)}(J)$, J parcourant l'ensemble des suites finies i-admissibles d'entiers positifs ou nuls. Grâce aux propriétés de commutation des éléments de $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), k^{(i)})$, on a un morphisme d'algèbre canonique f de A_* dans $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), k^{(i)})$.

Comme $\bigoplus_{n \geq 0} H_*(S(n), k^{(i)})$ est soumis aux relations (R_1), (R_2), (R_3) et (R_4) et est engendré par les éléments $a^{(i)}(J')$, J' parcourant l'ensemble des suites finies d'entiers positifs ou nuls, on vérifie que f est surjective.

D'autre part, il est facile de vérifier que, si q est un entier de la parité de i, $H^*(Z_p, q ; Z_p)$ est la Z_p-algèbre commutative libre engendrée par les éléments $F_q(a^{(i)}(J))$, J parcourant l'ensemble des suites i-admissibles $(j_1, \ldots, j_r)$ telles que :

$$\forall \lambda \in \{1, \ldots, r\} \quad j_\lambda < q\, p^{r-\lambda}(p-1)$$

...

Il est alors facile de vérifier que f est injective. Le théorème est donc démontré.

§ 5 - Détermination de l'hypermodule $\widetilde{H}_*(S_*(X), k)$

5.1. L'algèbre $\widetilde{H}_*(S_*(X), k)$

Soit W le Π - module différentiel gradué libre acyclique défini en 4.2. Choisissons un S (n)- (resp. S (n p)-) module différentiel gradué libre acyclique W_n (resp. $W_{n\,p}$) et désignons par f l'application composée :

$$W \otimes (W_n \otimes \widetilde{C}_*(X)^n)^p \to W \otimes W_n^p \otimes \widetilde{C}_*(X)^{n\,p} \to W_{n\,p} \otimes \widetilde{C}_*(X)^{n\,p}$$

la première flèche étant induite par la transposition :
$C_*(X)^n \otimes W_n \to W_n \otimes C_*(X)^n$, et la deuxième flèche par une application de $W \otimes W_n^p$ dans $W_{n\,p}$ compatible avec l'inclusion de $\Pi \mid S(n)$ dans S (n p).

Si u est un élément de $H_*(S_n(X), k)$ représenté par un élément u' de $W_n \otimes \widetilde{C}_*(X)^n$, on notera $e(j) \mid u$ la classe d'homologie de $f(e_j \otimes u'^p)$. On vérifie que $e(j) \mid u$ ne dépend que de j et de u.

Si Γ est un sous-groupe de S (n) formé de substitutions paires si p est différent de 2, et si σ est l'inclusion de Γ dans S(n) et σ' l'inclusion de $\Pi \mid \Gamma$ dans S (n p), on a la formule suivante :

$$u \in H_q(X,k), \alpha \in H_i(\Gamma,k) \Rightarrow e(j) \mid (\sigma_*(\alpha) \mid u) = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2} n\,q\,i}\, \sigma'_*(e(j) \mid \alpha) \mid u$$

Si u est un élément de $H_q(S_n(X), k)$ et j un entier positif ou nul, on posera par définition :

$$a(j) * u = c_q \; e(i) \mid u \quad \text{avec} \quad i = j - (p-1)\,q$$

Enfin, on définit par récurrence les éléments

$$a(j_1) * a(j_2) * \ldots * a(j_r) * u \quad \text{par :}$$

...

$$a(j_1) * a(j_2) * \dots * a(j_r) * u = a(j_1) * (a(j_2) * \dots * a(j_r) * u)$$

Proposition 22.

Soient $j_1, \dots, j_r$ une suite finie d'entiers positifs ou nuls, u et v deux éléments de $\widetilde{H}_q(X,k)$ et λ un élément de $\{1, \dots, r\}$. On a alors les relations suivantes :

(R'_o) $a(j_1) * \dots * a(j_r) * (u+v) = a(j_1) * \dots * a(j_r) * u + a(j_1) * \dots * a(j_r) * v$

(R'_1) si j_λ n'est congru ni à 0 ni à -1 modulo $2(p-1)$, on a :

$a(j_1) * \dots * a(j_r) * u = 0$

(R'_2) $j_1 < (p-1)(j_2 + \dots + j_r + q) \Rightarrow a(j_1) * \dots a(j_r) * u = 0$

(R'_3) $\lambda < r$, $j_\lambda > p\, j_{\lambda+1}$ $\Rightarrow$

$$a(j_1) * \dots * a(j_r) * u = \sum_t X(pt - j_\lambda + p\, j_{\lambda+1}, t)\, a(j_1) * \dots * a(j_\lambda - t) * a(j_{\lambda+1} + t) * \dots * a(j_r) * u$$

(R'_4) $j_1 = (p-1)(j_2 + \dots + j_r + q) \Rightarrow$

$$a(j_1) * \dots * a(j_r) * u = (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} (a(j_2) * \dots * a(j_r) * u)^p$$

avec $j = j_2 + \dots + j_r + q$.

Pour montrer (R'_o), il suffit de montrer que l'application $u \to e(j) \mid u$ de $\widetilde{H}_q(S_n(X), k)$ dans $\widetilde{H}_{p\,q+j}(S_{n\,p}(X), k)$ est linéaire. Pour cela, désignons par K_* le complexe $W_n \otimes \widetilde{C}_*(X)^n$ et choisissons deux cycles u et v de K_*.

Si P est une partie de $\{1, \dots, p\}$, posons :

$$w(P) = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p$$

avec :

$$x_i = \begin{cases} u & \text{si } i \in P \\ v & \text{si } i \notin P \end{cases}$$

...

On a alors :

$$(u + v)^p = \sum_P \omega(P)$$

Or, il est clair que : $t.\ \omega(P) = \omega(t.P)$

Si P est une partie de $\{1,\dots,p\}$ différente de $\emptyset$ ou de $\{1,\dots,p\}$ l'orbite de P sous l'action de Π a p éléments. Il existe donc un cycle ω de K^p_* tel que :

$$(u + v)^p = u^p + v^p + (1 + t + \dots + t^{p-1})\,\omega$$

Il en résulte l'égalité suivante dans $W \underset{\Pi}{\otimes} K^p_*$:

$$e_j \otimes (u + v)^p = e_j \otimes u^p + e_j \otimes v^p + (1 + t + \dots + t^{p-1})\, e_j \otimes \omega$$

$$= e_j \otimes u^p + e_j \otimes v^p + d(\alpha\, e_{j+1} \otimes \omega)$$

α étant un élément de $k(\Pi)$, soit 1 soit $1 + 2t + \dots + p\,t^{p-1}$.

On en déduit alors aisément la relation (R'_o).

Pour démontrer les relations (R'_i), $i = 1,2,3,4$, nous allons procéder comme suit :

On montre tout d'abord la formule suivante :

$$a(j_1) * a(j_2) * \dots * a(j_r) * u = (-1)^\alpha c_{q_1} \dots c_{q_r}\, a^{(q)}(i_1,\dots,i_r) \mid u$$

avec :

$$u \in \tilde{H}_q(X,k)$$

$$i_\lambda = j_\lambda - p^{r-\lambda}(p-1)\,q$$

$$q_\lambda = q + j_{\lambda+1} + \dots + j_r$$

$$\alpha = \frac{p(p-1)}{2}\, q\, j'$$

$$j' = j_2 + 2\,j_3 + \dots + (r-1)\,j_r$$

...

Cette formule se montre très simplement par récurrence sur r.

Les formules (R'_1), (R'_2), (R'_3) et (R'_4) sont alors les conséquences directes de la proposition 21.

Théorème 5.

$\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ est la k-algèbre commutative libre engendrée par les éléments $a(j_1)_* \ldots {}_* a(j_r) * u$, $(j_1,\ldots,j_r)$ parcourant l'ensemble des suites finies d'entiers positifs ou nuls, et u l'ensemble des éléments homogènes de $\widetilde{H}_*(X,k)$, et soumise aux relations $(R'_o),(R'_1),(R'_2),(R'_3)$ et (R'_4).

Soit A_* la k-algèbre commutative libre engendrée par les éléments $a(j_1)_* \ldots {}_* a(j_1)_* u, (j_1,\ldots,j_r)$ parcourant l'ensemble des suites finies d'entiers positifs ou nuls, et u l'ensemble des éléments homogènes de $\widetilde{H}_*(X,k)$, et soumise aux relations $(R'_o),(R'_1),(R'_2),(R'_3)$ et (R'_4). A_* s'envoie par un morphisme d'algèbre f dans $\widetilde{H}_*(S_*(X), k)$. Choisissons une base homogène $\{u_l\}$ de $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$, u_l étant de dimension d_l. D'après le théorème 4 et la proposition 10, $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ est la k-algèbr commutative libre engendrée par les éléments $a^{(d_l)}(i_1,\ldots,i_r)\,|\,u_l(i_1,\ldots,i_r$ parcourant l'ensemble des suites d_l-admissibles d'entiers positifs ou nuls. $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ est donc la k-algèbre commutative libre engendrée par les éléments :

$$a(j_1) * \ldots * a(j_r) * u_l$$

avec :
$$j_\lambda \equiv 0 \text{ ou } -1 \bmod (2(p-1))$$
$$j_1 \leq p\, j_2 \ldots j_{r-1} \leq p\, j_r$$
$$j_1 > (p-1)(j_2 + \ldots j_r + d_l)$$

...

Or, il est clair que la sous algèbre de A_* engendrée par ces éléments est égale à A_*. Il résulte que f est un isomorphisme et le théorème est démontré.

5.2. Opérations homologiques modulo p.

Soient W le Π - module différentiel gradué libre acyclique défini en 4.2 et K_* le k-complexe de chaîne d'un complexe simplicial. Choisissons un morphisme de complexe φ de $W \otimes K_*$ dans K^p_*, Π - équivariant, qui soit une approximation de la diagonale.

Proposition 23.

Soit u un élément de $H_q(K_*)$ représenté par un cycle u'. Il existe alors des cycles homogènes v_j de K_* et des éléments homogènes w_j de K^p_* tels que, pour tout entier j positif ou nul, on ait :

$$\varphi(e_j \otimes u') = v_j^p + T_j\, w_j + d\, w_{j+1}$$

De plus, si St_i est l'opération homologique duale de St^i on a :

$$j + q \not\equiv 0 \pmod p \Rightarrow v_j = 0$$

$j + q = p(q-i) \Rightarrow$ la classe d'homologie de v_j est égale à $c_{q-i}\, \varepsilon_i\, St_i\, u$

Soit W' le Π-module différentiel gradué libre, engendré en dimension -i par w_i, la différentielle étant donnée par :

$$d\, w_i = (-1)^i\, \overline{T}_{i+1}\, w_{i+1}$$

avec :

$$i \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow \overline{T}_i = T_i = 1 + t + \ldots + t^{p-1}$$

$$i \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow \overline{T}_i = 1 - t^{p-1} = -t^{p-1}\, T_1$$

...

On définit l'application linéaire ψ de K_* dans $W' \underset{\Pi}{\otimes} K^p_*$ par :

$$\psi(x) = \sum_i w_i \otimes \varphi(e_i \otimes x)$$

et l'on vérifie que ψ est un morphisme de complexes.

Par une méthode similaire à celle utilisée pour la démonstration de la proposition 9, on montre que $H_*(W' \underset{\Pi}{\otimes} k^p_*)$ est isomorphe à $H_*(W' \underset{\Pi}{\otimes} H_*(K_*)^p)$. On montre alors aisément que $H_*(W' \underset{\Pi}{\otimes} K^p_*)$ est engendré par les classes d'homologie d'éléments de $W' \underset{\Pi}{\otimes} K^p_*$ de la forme :

$$w_i \otimes u^p \quad \text{avec} \quad d\,u = 0$$

$$w_o \otimes T_o\, u'$$

Si u' est un cycle de K_*, $\psi(u')$ est un cycle de $W' \otimes K^p_*$. Il existe donc des cycles v_{ij} de K_*, et des éléments v et ω'_i de K^p_* tels que :

$$\psi(u') = \sum_{ij} w_i \otimes v^p_{ij} + w_o \otimes T_o\, v + d \sum_i w_i \otimes \omega'_i$$

Il existe d'autre part des cycles ω''_i de K^p_* tels que :

$$\sum_j v^p_{ij} = (\sum_j v_{ij})^p + T_o\, \omega''_i$$

On en déduit alors par identification :

$$\varphi(e_o \otimes u') = (\sum v_{oj})^p + T_o \omega'_o + T_o v + d\,\omega_o$$

$$i > 0 \Rightarrow \varphi(e_i \otimes u') = (\sum_j v_{ij})^p + T_o \omega''_i - (-1)^i\, T_i\, \omega'_{i-1} + (-1)^i\, d\,\omega'_i$$

La première partie de la proposition résulte alors du fait que T_o est divisible par T_i dans $k[\Pi]$.

Si j + q n'est pas divisible par p, v_j est évidemment nul.

Si l'on a : j + q = p(q-i), prenons un cocycle x de K* de dimension q-i. On a alors :

$$x.v_j = x^p.v_j^p = x^p.(v_j^p + T_j\, \omega_j + d\,\omega_{j+1}) = x^p.\varphi(e_j \otimes u')$$

...

Soit $\varphi' : W \otimes K^{*P}$ dans K^* l'application définie par :

$$\varphi'(e_j \otimes y).\ \alpha = (-1)^{\frac{i(j-1)}{2}}\ y.\ \varphi(e_j \otimes \alpha)$$

On a alors :

$$x\ .\ v_j = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\ \varphi'(e_j \otimes x^P)\ .\ u'$$

Soit $\bar{x}$ la classe de cohomologie de x et $\bar{v}_j$ la classe d'homologie de v_j. Il en résulte :

$$\bar{x}.\ \bar{v}_j = \bar{x}^P / e(j)\ .\ u = c_{q-i}\ \epsilon_i\ S\,t^i\,\bar{x}\ .\ u$$

Comme ceci a lieu pour tout cocycle de dimension q-i de K^*, on a :

$$\bar{v}_j = c_{q-i}\ \epsilon_i\ S\,t_i\,u$$

et la proposition est démontrée.

5.3. Le produit $\times$ de $\underset{n>0}{\oplus} H_*(S(n), k) \otimes \tilde{H}_*(S_*(X),k)$ dans $\tilde{H}_*(S_*(X),k)$

Soit σ l'inclusion de Π dans $S(p)$. On désignera par a(j) la classe d'homologie $\sigma_*(e(j))$.

Proposition 24.

Soient u un élément de $\tilde{H}_*(S_*(X),k)$ et i un entier positif ou nul. On a alors les formules :

i impair ou p pair : $\Rightarrow a(i) \times u = \sum_j \epsilon_j\ a(i+j)_*\ St_j\ u$

i pair et p impair $\Rightarrow a(i) \times u = \sum_j \epsilon_{2j}\ a(i+2j)_*\ St_{2j}\ u$

On supposera que X est un complexe simplicial pointé.

...

Soit f l'application de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$f(\Sigma \lambda_i e_i, \Sigma \mu_i e_i) = e_o + \Sigma \lambda_i e_{2i+1} + \Sigma \mu_i e_{2i+2}$$

(e_i désigne ici le i-ème vecteur de base de $\mathbb{R}^\infty$).

Soit $h : (\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times E^n(X) \to E^{n\,p}(X)$ l'application continue définie par :

$$h(t_1, \ldots, t_p; x'_1, t'_1; \ldots x'_n, t'_n) = (u_1, \theta_1; \ldots; u_{p\,n}, \theta_{p\,n})$$

avec :

$$i = (\lambda - 1)p + \mu \quad \begin{matrix} 1 \le \lambda \le n \\ 1 \le \mu \le p \end{matrix} \Rightarrow u_i = x'_\lambda, \theta_i = f(t_\mu, t'_\lambda)$$

On vérifie que h induit une application continue de $\wedge^p S^\circ \hat{\wedge} \wedge^n X$ dans $\wedge^{n\,p} X$ homotope à la restriction du produit $\times$ à $\wedge^p S^\circ \hat{\wedge} \wedge^n X$. Il en résulte que le produit $\times$ de $S_p(S^\circ) \hat{\wedge} S_n(X)$ dans $S_{n\,p}(X)$ est induit par l'application continue h' $S(p) \times S(n)$ - équivariante de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times (\mathbb{R}^\infty)^{(n)} \times X^n$ dans $(\mathbb{R}^\infty)^{(n\,p)} \times X^{n\,p}$ définie par :

$$h'(t_1, \ldots, t_p, t'_1, \ldots, t'_n, x'_1, \ldots, x'_n) = (\theta_1, \ldots, \theta_{p\,n}, u_1, \ldots, u_{p\,n})$$

Si i est un entier, on choisira une triangulation de $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}/S(i)$ $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}$ est ainsi un complexe simplicial S(i)-libre, et W_i, le k-complexe de chaînes de $(\mathbb{R}^\infty)^{(i)}$ est un S(i)-module différentiel gradué libre acyclique.

Les structures de complexe simplicial sur $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)}$, $(\mathbb{R}^\infty)^{(n)}$, $(\mathbb{R}^\infty)^{(n\,p)}$ et X induisent alors des structures de C.W.complexe localement acycliques sur $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times (\mathbb{R}^\infty)^{(n)} \times X^n$ et sur $(\mathbb{R}^\infty)^{(n\,p)} \times X^{n\,p}$ tels que les complexes de chaînes associés soient respectivement :

$$W_p \otimes W_n \otimes C_*(X)^n \quad \text{et} \quad W_{n\,p} \otimes C_*(X)^{n\,p}$$

...

Choisissons une application h" de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times (\mathbb{R}^\infty)^{(n)} \times X^n$ dans $(\mathbb{R}^\infty)^{n\,p} \times X^{n\,p}$ possédant les propriétés suivantes :

i) h" est $S(p) \times S(n)$-équivariante.

ii) h" est homotope à h' dans une homotopie $S(p) \times S(n)$-équivariante.

iii) h" est une approximation de la diagonale de X^n dans $X^{n\,p}$, i.e., pour tout simplexe $\sigma_1 \times \sigma_2 \times \ldots \times \sigma_n$ de X^n, h" $((\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times (\mathbb{R}^\infty)^{(n)} \times \sigma_1 \times \ldots \times \sigma$ est inclus dans $(\mathbb{R}^\infty)^{(n\,p)} \times \sigma_1^p \times \sigma_2^p \times \ldots \times \sigma_n^p$.

iv) h" est cellulaire, i.e. h" envoie le q-ième squelette de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times (\mathbb{R}^\infty)^{(n)} \times X^n$ dans le q-ième squelette de $(\mathbb{R}^\infty)^{(n\,p)} \times X^{n\,p}$.

h" induit alors une application ψ $S(p) \times S(n)$-équivariante de $W_p \otimes W_n \otimes C_*(X)^n$ dans $W_{n\,p} \otimes C_*(X)^{n\,p}$ qui est une approximation de la diagonale.

Soient $\Delta' : W_p \to W_p \otimes W_p$ un morphisme de complexe compatible avec la diagonale de $S(p)$ dans $S(p) \times S(p)$, $\varphi' : W_p \otimes W_n \otimes C_*(X)^n \to (W_n \otimes C_*(X)^n)^p$ un morphisme de complexe $S(p) \times S(n)$-équivariant qui soit une approximation de la diagonale et $\alpha : W_p \otimes W_n^p \to W_{n\,p}$ un morphisme de complexe compatible avec l'inclusion de $S(p) \mid S(n)$ dans $S(n\,p)$.

On désignera par ψ' l'application composée :

$$W_p \otimes W_n \otimes C_*(X)^n \xrightarrow{\Delta' \otimes 1} W_p \otimes W_p \otimes W_n \otimes C_*(X)^n \xrightarrow{1 \otimes \varphi'}$$

$$W_p \otimes (W_n \otimes C_*(X)^n)^p \xrightarrow{1 \circ T} W_p \otimes W_n^p \otimes C_*(X)^{n\,p} \xrightarrow{\alpha \otimes 1} W_{n\,p} \otimes C_*(X)^{n\,p}$$

(T est induit par les transpositions de $C_*(X)^n \otimes W_n$ dans $W_n \otimes C_*(X)^n$)

D'après le théorème des modèles acycliques, on vérifie que ψ' est $S(p) \times S(n)$-homotope à ψ.

...

Soient W le Π - module différentiel gradué libre acyclique défini en 4.2, et Δ un morphisme de complexe de W dans $W \otimes W$ compatible avec la diagonale de Π dans $\Pi \times \Pi$, β et γ deux morphismes de complexes respectivement de W dans W_p et de $W \otimes W_n^p$ dans $W_{n\,p}$, compatibles avec les inclusions, respectivement, de Π dans $S(p)$ et de $\Pi \mid S(n)$ dans $S(n\,p)$, et φ une approximation de la diagonale de $W \otimes W_n \otimes C_*(X)^n$ dans $(W_n \otimes C_*(X)^n)^p$, $\Pi \times S(n)$ équivariante. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
W \otimes W_n \otimes C_*(X)^n & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & W \otimes W \otimes W_n \otimes C_*(X)^n & \xrightarrow{1 \otimes \varphi} & W \otimes (W_n \otimes C_*(X)^n)^p \\
\downarrow{\scriptstyle \beta \otimes 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes T} \\
W_p \otimes W_n \otimes C_*(X)^n & & & & W \otimes W_n^p \otimes C_*(X)^{n\,p} \\
& \searrow^{\psi'} & & \swarrow_{\gamma \otimes 1} & \\
& & W_{n\,p} \otimes C_*(X)^{n\,p} & &
\end{array}$$

Il est clair que ce diagramme est $\Pi \times S(n)$ - homotopiquement commutatif.

Il en résulte que si u est un élément de $\tilde{H}_*(S_*(X),k)$ représenté par un élément u' de $W_n \otimes C_*(X)^n$, et i un entier, $a(i) \times u$ est la classe d'homologie de $\gamma \otimes 1 \circ 1 \otimes T \circ 1 \otimes \varphi \circ \Delta \otimes 1 (e_i \otimes u')$ dans $W_{n\,p} \underset{S(n\,p)}{\otimes} C_*(X)^{n\,p}$.

On choisira comme application Δ l'application suivante :

$$\Delta e_{2i} = \sum_j e_{2j} \otimes e_{2i-2j} + \sum_j \sum_{0 \le k < l < p} t^k e_{2j+1} \otimes t^l e_{2i-2j-1}$$

$$\Delta e_{2i+1} = \sum_j e_{2j} \otimes e_{2i-2j+1} + \sum_j e_{2j+1} \otimes t\, e_{2i-2j}$$

...

On sait que Δ est un morphisme de complexe compatible avec la diagonale de Π dans $\Pi \times \Pi$ (voir [25]).

Si u' est un cycle de dimension q de $W_n \underset{S(n)}{\otimes} C_*(X)^n$, il existe d'après la proposition 23, des cycles homogènes v_j de $W_n \underset{S(n)}{\otimes} C_*(X)^n$ et des éléments homogènes ω_j de $(W_n \underset{S(n)}{\otimes} C_*(X)^n)^p$ tels que l'on ait :

$$i \geq 0 \Rightarrow \varphi(e_j \otimes u') = v_j^p + T_j \omega_j + d\,\omega_{j+1}$$

On vérifie alors la formule suivante (dans $W \underset{\Pi}{\otimes} (W_n \underset{S(n)}{\otimes} C_*(X)^n)^p$) :

$$1 \otimes \varphi \circ \Delta \otimes 1\,(e_i \otimes u') = \sum_{0 \leq j \leq i} e_j \otimes (\alpha_{ij}\, v_{i-j}^p + T_{ij}\, \omega_{i-j} + T'_{ij}\, d\,\omega_{i-j+1})$$

avec :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \dfrac{p(p-1)}{2} & \text{si } i \equiv 0,\ j \equiv 1 \pmod 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$T_{ij} = \begin{cases} T_1 & \text{si } i \equiv 1,\ j \equiv 0 \pmod 2 \\ T_o & \text{sinon} \end{cases}$$

$$T'_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{0 \leq k < l < p} t^{l-k} & \text{si } i \equiv 0,\ j \equiv 1 \pmod 2 \\ t & \text{si } i \equiv 1,\ j \equiv 1 \pmod 2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit :

$$1 \otimes \varphi \circ \Delta \otimes 1\,(e_i \otimes u') = \sum_{0 \leq j \leq i} (e_j \otimes \alpha_{ij}\, v_{i-j}^p + (-1)^j\, d\,(e_j \otimes T'_{ij}\, \omega_{i-j+1}))$$

On vérifie alors aisément la formule :

$$a(i) \times u = \sum_j c_{q-j}\ \varepsilon_j\, \alpha_{i\,i+j}\, e\,(i + pj - (p-1)\,q) \mid St_j\, u$$

ce qui entraîne directement la proposition.

...

5.4. L'hyperalgèbre $\widetilde{H}_*(S_*(S^0),k)$ et l'hypermodule $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$

Dans ce qui suit, on désignera par A_p l'algèbre de Hopf graduée des opérations homologiques stables modulo p. A_p est engendrée par les opérations St_i de degré -i.

Soit P_* l'élément de A_p défini par :

$$P_* = \begin{cases} \sum_i St_i & \text{si } p = 2 \\ \sum_i (-1)^i St_{2i(p-1)} & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

P_* est un élément inversible de A_p et l'on désignera par $\bar{P}_*$ son inverse, et par $\bar{P}_i$ la composante de degré -i de $\bar{P}_*$.

Proposition 25.

Soient i un entier positif ou nul et u un élément de $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$. On a les formules :

$$a(i) \times u = \begin{cases} \sum_j a(i+j) * P_j u & \text{si } p\,i \equiv 0 \pmod 2 \\ \sum_j a(i+j) * (P_j u - P_{j-1} \beta u) & \text{si } p\,i \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$$a(i) * u = \begin{cases} \sum_j a(i+j) \times \bar{P}_j u & \text{si } p\,i \equiv 0 \pmod 2 \\ \sum_j a(i+j) \times (\bar{P}_j u + \beta \bar{P}_{j-1} u) & \text{si } p\,i \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Ces égalités se montrent très simplement à l'aide de la proposition 24.

D'autre part, si T_* désigne l'opération P_* ou $\bar{P}_*$, si α est un élément de $\widetilde{H}_i(S_*(S^0),k)$, i étant strictement positif, et u et v deux éléments de $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ de dimensions, respectivement, j et j', on

...

vérifie que :

$$T_*(u.v) = T_*(u) \,.\, T_*(v)$$

$$T_*(\alpha \times u) = T_*(\alpha) \times T_*(u)$$

$$\beta\,(u \,.\, v) = \beta(u) \,.\, v + (-1)^j u \,.\, \beta(v)$$

$$\beta\,(\alpha \times u) = \beta(\alpha) \times u + (-1)^i \alpha \times \beta\,(u)$$

Enfin, l'étude de la structure de A_p - module de $H_*(\Pi\,, k)$ permet d'obtenir les résultats suivants :

$$\beta a(2i) = a(2i-1)$$

$$\beta a(2i+1) = 0$$

$$p = 2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} P_*\ a(i) = \sum\limits_j \binom{i-j}{j} a(i-j) \\ \overline{P}_*\ a(i) = \sum\limits_j \binom{i+j}{j} a(i-j) \end{array} \right.$$

$$p > 2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} P_*\ a(2i) = \sum\limits_j (-1)^j \binom{i-(p-1)j}{j} a\,(2i - 2j(p-1)) \\ P_*\ a(2i+1) = \sum\limits_j (-1)^j \binom{i-(p-1)j}{j} a\,(2i+1-2j(p-1)) \\ \overline{P}_*\ a(2i) = \sum\limits_j \binom{i+j}{j} a(2i - 2j(p-1)) \\ \overline{P}_*\ a(2i+1) = \sum\limits_j \binom{i+j}{j} a(2i+1-2j(p-1)) \end{array} \right.$$

Toutes ces propriétés permettent de déterminer complètement la structure d'hyperalgèbre de $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), k)$ ainsi que la structure d'hypermodule sur $\bigoplus\limits_{n>0} \widetilde{H}_*(S_n(S^\circ), k)$ de $\widetilde{H}_*(S_*(X), k)$ en fonction des structures de coalgèbre et de A_p - module de $\widetilde{H}_*(X, k)$.

Remarque.

Il est évidemment possible de représenter $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), k)$ comme

...

l'hyperalgèbre définie par les générateurs a (i) et certaines relations, et de même de représenter $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$ comme l'hypermodule sur $\bigoplus_{n>0} \widetilde{H}_*(S_n(S^\circ),k)$ engendrée par $\widetilde{H}_*(X,k)$ et soumis à certaines relations. Malheureusement, il ne semble pas que ces relations puissent se réduire, pour toutes les valeurs de p, à des relations simples et utilisables. Cependant, si p est égal à 2, ces relations se réduisent bien et l'on a les deux théorèmes suivants :

Théorème 6.

$\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ),Z_2)$ est l'hyperalgèbre graduée engendrée par $H_*(Z_2, Z_2)$ de générateurs a (i) et soumise aux relations :

$$(S_1)\quad i < j \Rightarrow \sum_t \binom{j+t}{t} a(i+t) \times a(j-t) = 0$$

$$(S_2)\quad a(0) = e^2$$

Théorème 7.

$\widetilde{H}_*(S_*(X), Z_2)$ est l'hypermodule gradué sur $\bigoplus_{n>0} \widetilde{H}_*(S_n(S^\circ, Z_2)$ engendré par $\widetilde{H}_*(X, Z_2)$ et soumis aux relations :

$$(S_3) : \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \forall u \in \widetilde{H}_j(X,Z_2) :$$
$$i < j \Rightarrow \sum_t a(i+t) \times \overline{P}_t\, u = 0$$

$$(S_4) : \forall j \in \mathbb{N},\ \forall u \in \widetilde{H}_j(X,Z_2) :$$
$$\sum_t a(j+t) \times \overline{P}_t\, u = u^2$$

Nous démontrons ces deux théorèmes simultanément.

Soit Ω'_* l'algèbre tensorielle sur $H_*(Z_2,Z_2)$. Les générateurs de $H_*(Z_2,Z_2)$ seront notés a (i) et le produit tensoriel dans Ω'_* sera

...

noté $\times$. On désignera par Ω_* l'algèbre Ω'_* soumise aux relations suivantes :

i) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $a(i) \times a(j) = a(j) \times a(i)$

ii) $i < j \Rightarrow \sum_t \binom{j+t}{t} a(i+t) \times a(j-t) = 0$

On désignera également par Ω^r_* le sous-espace de Ω_* engendré par les éléments de Ω_* de la forme :

$$a(i_1) \times a(i_2) \times \ldots \times a(i_r)$$

Si X est un espace topologique pointé, on désignera par $\Omega_*(X)$ le Ω_* - module $\Omega_* \otimes \tilde{H}_*(X, Z_2)$ (où l'on notera $\times$ le produit tensoriel) et soumis aux relations de Ω_* - modules suivantes :

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\forall u \in H_j(X, Z_2)$:

$i < j \Rightarrow \sum_t a(i+t) \times \bar{P}_t u = 0$

On notera $\Omega^r_*(X)$ le sous-espace $\Omega^r_* \times \tilde{H}_*(X, Z_2)$ de $\Omega_*(X)$.

Comme $\tilde{H}_*(S_*(S^\circ), Z_2)$ et $\tilde{H}_*(S_*(X), Z_2)$ sont soumis aux relations R'_2 (voir Proposition 22), il est clair que Ω_* et $\Omega_*(X)$ se projettent canoniquement dans , respectivement, $\tilde{H}_*(S_*(S^\circ), Z_2)$ et $\tilde{H}_*(S_*(X), Z_2)$.

On désignera par $\bar{\Omega}^r_*$ et $\bar{\Omega}^r_*(X)$ l'image de Ω^r_* et $\Omega^r_*(X)$ dans, respectivement, $\tilde{H}_*(S_*(S^\circ), Z_2)$ et $\tilde{H}_*(S_*(X), Z_2)$.

Pour des raisons de commodité, on identifiera $\Omega^r_*(X)$ et $\bar{\Omega}^r_*(X)$ si la projection canonique de $\Omega^r_*(X)$ sur $\bar{\Omega}^r_*(X)$ est un isomorphisme.

a) $\Omega^r_*(X)$ est un A_2- module.

Il est clair que $\Omega^1_*(X)$ est isomorphe à $\bar{\Omega}^1_*(X)$. $\Omega^1_*(X)$ est donc un A_2-module. En particulier, si X est égal à l'espace d'Eilenberg - Mac - Lane $K(Z_2, 1)$ pointé par un point extérieur, on vérifie que le

...

Z_2 - module $H_*(Z_2,Z_2) \otimes H_*(Z_2,Z_2)$ soumis aux relations :

$$i < j \Rightarrow \sum_t \binom{j+t}{t} a(i+t) \otimes a(j-t) = 0$$

est un A_2-module.

D'autre part, l'application $a \otimes b \to b \otimes a$ de $H_*(Z_2,Z_2) \otimes H_*(Z_2,Z_2)$ dans lui-même est A_2-linéaire. Il en résulte que Ω_* et $\Omega_*(X)$ sont des A_2-modules, ainsi que Ω^r_* et $\Omega^r_*(X)$.

Si u est un élément de Ω_* ou de $\Omega_*(X)$, on posera alors :

$$a(i) * u = \sum_t a(i+t) \times \bar{P}_t \, u$$

On définira également les éléments $a(i_1) * a(i_2) * \ldots * a(i_r) * u$ par récurrence par :

$$a(i_1) * a(i_2) * \ldots * a(i_r) * u = a(i_1) * (a(i_2) * \ldots * a(i_r) * u)$$

b) $\Omega^2_*(S^n)$ est égal à $\bar{\Omega}^2_*(S^n)$

Soient n un entier positif ou nul, et S^n la sphère de dimension n. On désignera par u le générateur de $\tilde{H}_n(S^n, Z_2)$.

D'après le théorème 5, on vérifie que $\bar{\Omega}^2_r(S^n)$ est le Z_2-module engendré par les éléments $a(i) * a(j) * u$, et soumis aux relations :

$$i < j + n \Rightarrow a(i) * a(j) * u = 0$$

$$i > 2j \Rightarrow a(i) * a(j) * u = \sum_t \binom{t-1}{2t-i+2j} a(i-t) * a(j+t) * u$$

Soient i et j deux entiers, i étant supérieur ou égal à j.

On vérifie aisément la formule dans Ω^2_* :

$$a(i) * a(j) = a(i) * P_j \, a(2j) = a(i-j) \times a(2j) + \sum_{t<j} a(i-j+t) * P_t \, a(j)$$

...

On construit alors par récurrence, des éléments $\omega_t(a(j))$ indépendants de i, de dimension $2j + 2t$ tels que l'on ait, pour tout i :

$$a(i) *_* a(j) = \sum_t a(i-j-2t) \times \omega_t(a(j))$$

et : $\omega_o(a(j)) = a(2j)$

On a alors dans $\Omega^2_*(S_n)$:

$$a(i) * a(j) * u = a(i) *_* (a(j) \times u) = \sum_t a(i+t) \times \bar{P}_t\, a(j) \times u$$

$$= (a(i) *_* a(j)) \times u = \sum_t a(i-j-2t) \times \omega_t(a(j)) \times u$$

$$= \sum_t \omega_t(a(j)) \times (a(i-j-2t) * u)$$

Il en résulte que, si i-j est strictement inférieur à n, $a(i) *_* a(j) * u$ est nul dans $\Omega^2_*(S^n)$, et la première des deux relations de $\bar{\Omega}^2_*(S^n)$ est vérifiée dans $\Omega^2_*(S^n)$.

Il reste à vérifier la deuxième relation.

Soient i et j deux entiers, i étant strictement supérieur à 2j. On a alors dans $\Omega^2_*(S^n)$:

$$a(i) * a(j) *_* u = \sum_t \binom{j+t}{t} a(i+t) \times a(j-t) \times u$$

$$= \sum_t \binom{j+t}{t} a(j-t) \times a(i+t) \times u = \sum_{t,t'} \binom{j+t}{t} \binom{i+t-t'}{t} a(j-t+t') * a(i+t-t') *_* u$$

Soit :

$$a(i) * a(j) *_* u = \sum_{t,t'} \binom{j+t+t'}{j} \binom{i+t}{t'} a(j-t) * a(i+t) *_* u$$

Or, $\binom{j+t+t'}{j}$ est le cœfficient de $x^{t+t'}$ dans la série formelle de $Z_2[[x]] : \frac{1}{(1+x)^{j+1}}$. De même $\binom{i+t}{t'}$ est le cœfficient de $x^{i+t-t'}$ dans la série $(1+x)^{i+t}$.

$\sum_{t'} \binom{j+t+t'}{j}\binom{i+t}{t'}$ est donc le cœfficient de x^{i+2t} dans la série $(1+x)^{i+t-j-1}$. On a alors, si i est strictement supérieur à 2 j :

$$\sum_{t'} \binom{j+t+t'}{j}\binom{i+t}{t'} = \binom{i+t-j-1}{i+2t}$$

Il en résulte l'égalité suivante dans $\Omega^2_*(S^n)$:

$$i > 2j \Rightarrow a(i) * a(j) * u = \sum_t \binom{t-1}{2t-i+2j} a(i-t) * a(j+t) * u$$

et $\Omega^2_*(S^n)$ est égal à $\bar{\Omega}^2_*(S^n)$; c'est-à-dire que $\Omega^2_*(S^n)$ s'injecte dans $\tilde{H}_*(S_*(S^n), Z_2)$.

c) $\Omega^2_*(X)$ est éagl à $\bar{\Omega}^2_*(X)$

Nous allons montrer que $\Omega^2_*(X)$ est égal à $\bar{\Omega}^2_*(X)$dans le cas où X est un C.W.complexe fini pointé. Il en résultera par fonctorialité que $\Omega^2_*(X)$ est égal à $\bar{\Omega}^2_*(X)$, quel que soit l'espace topologique pointé X ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé.

Soit donc X un C.W.complexe fini pointé. On choisira une base homogène $\{u_1, u_2, \ldots\}$ de $\tilde{H}_*(X, Z_2)$, u_i étant de dimension n_i.

Si n est un entier, on désignera par $Z_*(n)$ le noyau de la projection $\alpha \to \alpha \times u$ de Ω^2_* sur $\Omega^2_*(S^n)$, u étant le générateur de $\tilde{H}_n(S^n, Z_2)$, et par $E_*(n)$ l'image de $\Omega^2_*(S^n)$ par une section de degré -n de cette projection.

Il est clair que si α est un élément de $Z_*(n_i)$, $\alpha \times u_i$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\Omega^2_*(X)$ de la forme $\beta \times u_j$ ou n_j est strictement inférieur à n_i .

Il en résulte que $\Omega^2_*(X)$ est engendré par des éléments de $\Omega^2_*(X)$ de la forme $\alpha \times u_i$, α appartenant à $E_*(n_i)$, et l'on a :

$$\dim \Omega^2_i(X) \leq \sum_{n \geq 0} \dim \Omega^2_i(S^n) \cdot \dim \tilde{H}_n(X, Z_2)$$

...

D'autre part, il est facile de voir que les éléments $a(i)_* a(j)_* u_k$ avec :

$$i \geq n_k$$

$$2j \geq i \geq j + n_k$$

forment une base de $\bar{\Omega}^2_*(X)$.

Il en résulte :

$$\dim \bar{\Omega}^2_i(X) = \sum_{n \geq 0} \dim \Omega^2_i(S^n) \cdot \dim \bar{H}_n(X, Z_2)$$

Soit :

$$\dim \Omega^2_i(X) \leq \dim \bar{\Omega}^2_i(X)$$

Comme $\Omega^2_*(X)$ se projette sur $\bar{\Omega}^2_*(X)$, on en déduit que $\Omega^2_*(X)$ est égal à $\bar{\Omega}^2_*(X)$.

d) $\Omega^r_*(X)$ est égal à $\bar{\Omega}^r_*(X)$.

Nous allons montrer que $\Omega^r_*(X)$ est égal à $\bar{\Omega}^r_*(X)$.

Pour cela, il suffira de montrer que les relations (R'_2) et (R'_3) de la proposition 22 sont vérifiées dans $\Omega^r_*(X)$.

$\omega_t(a(j))$ étant l'élément de Ω^1_* défini au b), on définira les éléments $\omega_t(a(j_1) \otimes \ldots \otimes a(j_r))$ de Ω^r_* par récurrence sur r de la façon suivante :

$$\omega_t(a(j_1) \otimes \ldots \otimes a(j_r)) = \sum_{t'} \omega_{t'}(a(j_1)) \times \omega_{t-t'}(a(j_2) \otimes \ldots \otimes a(j_r))$$

On montre alors par récurrence la formule suivante (dans Ω^{r+1}_*) :

$$a(i) * (a(j_1) \times \ldots \times a(j_r)) = \sum a(i - j_1 - \ldots - j_r - 2t) \times \omega_t(a(j_1) \otimes \ldots \otimes a(j_r))$$

Soit u un élément de $\tilde{H}_n(X, Z_2)$. On a :

...

$$a(i)_*(a(j_1)\times\ldots\times a(j_r)\times u) = \sum_{tt'} a(i+t+t')\times \bar{P}_t(a(j_1)\times\ldots\times a(j_r)\times \bar{P}_{t'}, u$$

$$= \sum_{t'} (a(i+t')_*(a(j_1)\times\ldots\times a(j_r)))\times \bar{P}_{t'}, u$$

$$= \sum_{t,t'} a(i+t'-j_1-\ldots-j_r-2t)\times \omega_t(a(j_1)\otimes\ldots\otimes a(j_r))\times \bar{P}_{t'}, u$$

$$= \sum_{t} \omega_t(a(j_1)\otimes\ldots\otimes a(j_r))\times (a(i-j_1-\ldots-j_r-2t)_* u)$$

Il en résulte clairement que si i est strictement inférieur à $j_1+\ldots+j_r+n$, $a(i)_*(a(j_1)\times\ldots\times a(j_r)\times u)$ est nul, et l'on vérifie ainsi les relations (R'_2) dans $\Omega^{r+1}_*(X)$.

Nous allons maintenant montrer les relations (R'_3) dans $\Omega^r_*(X)$ par récurrence sur r.

Supposons donc que les relations (R'_3) sont vérifiées dans $\Omega^s{}_*(X)$ pour tout s inférieur ou égal à r.

Soient $j_o, j_1, \ldots, j_r$ $r+1$ entiers positifs ou nuls, u un élémen de $\tilde{H}_*(X, Z_2)$ et λ un entier strictement inférieur à r tel que :

$$j_\lambda > 2\, j_{\lambda+1}$$

Si λ est non nul, on vérifie, grâce au fait que $\Omega^r_*(X)$ est un A_2- module et que les relations (R'_3) sont vérifiées dans $\Omega^r_*(X)$, que l'on a :

$$a(j_o)_*\ldots_* (j_r)_* u =$$

$$\sum \binom{t-1}{2t-j_\lambda+2j_{\lambda+1}} a(j_o)_*\ldots_* a(j_\lambda - t)_* a(j_{\lambda+1}+t)_*\ldots_* a(j_r)_* u$$

Si λ est nul, nous allons procéder comme suit :

Soit Y l'espace $K(Z_2,1)^{r-1}\times X$, pointé par un point extérieur. On a une application φ de $\tilde{H}_*(Y, Z_2)$ sur $\Omega^{r-1}_*(X)$, c'est l'application :

$$a(i_1)\otimes\ldots\otimes a(i_{r-1})\otimes u \to a(i_1)\times\ldots\times a(i_{r-1})\times u$$

...

On vérifie que φ est A_2-linéaire.

On vient de vérifier que si v est un élément de $\Omega^{r-1}_j(X)$, et si i est strictement inférieur à j, $a(i) * u$ est nul dans $\Omega^r_*(X)$. Il en résulte que φ induit une application ψ de $\Omega^2_*(Y)$ dans $\Omega^{r+1}_*(X)$.

Comme (R'_3) est vérifié dans $\Omega^2_*(Y)$, on en déduit alors la formule :

$$j_o > 2\, j_1 \Rightarrow$$

$$a(j_o) * \ldots * a(j_r) * u = \sum \binom{t-1}{2t-j_o+2j_1} a(j_o-t) * a(j_1+t) * a(j_2) * \ldots * a(j_2) * u$$

Les relations (R'_3) sont donc vérifiées dans $\Omega^r_*(X)$. Il en résulte que $\Omega^r_*(X)$ est égal à $\overline{\Omega}^r_*(X)$.

e) Démonstration des théorèmes 6 et 7.

Pour démontrer les théorèmes 6 et 7, il reste à montrer que les relations (R'_4) sont conséquences des relations $(S_1),(S_2),(S_3)$ et (S_4).

On a vu au d) la formule :

$$\forall\, u \in \tilde{H}_*(X, Z) :$$

$$a(i)_*(a(j_1) \times \ldots \times a(j_r) \times u) =$$

$$\sum_t w_t (a(j_1) \otimes \ldots \otimes a(j_r)) \times (a(i-j_1-\ldots-j_r-2t) * u)$$

Grâce à la relation (S_4), on vérifie alors que si i est égal à $j_1+\ldots+j_r+\dim u$, on a :

$$a(i) * (a(j_1) \times \ldots \times a(j_r) \times u) = a(2j_1) \times \ldots \times a(2j_r) \times u^2$$

Comme le produit $\times$ est distributif par rapport au produit $.$, on a :

$$(a(2j_1) \times \ldots \times a(2j_r)) \times u^2 = (a(j_1) \times \ldots \times a(j_r) \times u)^2$$

...

On en déduit alors les relations (R'_4) et les théorèmes 6 et 7 sont démontrés.

Remarque.

Les théorèmes 6 et 7 ne se généralisent pas au cas où p est un nombre premier impair car la formule :

$$a(j) = P_j \; a(2j)$$

permettant de construire les éléments $w_t(a(j))$ ne se généralise pour p quelconque à la formule :

$$a(j) = P_{(p-1)\,j}\, a(p\,j)$$

que si j est pair.

Cependant, on peut quand même exprimer les relations (R'_3) déduites des relations d'Adem en fonction des relations (R'_2) et des relations de commutation du produit $\times$.

§ 6 - Détermination de l'hypermodule $H_*(\wedge X, k)$

Soit $\hat{X}$ l'espace topologique X pointé par un point extérieur. $\wedge \hat{X}$ est alors la somme topologique des espaces $\wedge_n \hat{X} - \wedge_{n-1} \hat{X}$.

Si f est l'application de $\wedge \hat{X}$ dans $S_*(\hat{X})$ qui, sur $\wedge_n \hat{X} - \wedge_{n-1} \hat{X}$ est égale à le projection canonique de $\wedge_n \hat{X}$ sur $S_n(\hat{X})$, on vérifie que f est une équivalence d'homotopie de $\wedge \hat{X}$ sur le complémentaire du point base dans $S_*(\hat{X})$, et induit un isomorphisme de $\bigoplus_{n>0} \tilde{H}_*(S_n(S^0),k)$ - hypermodule gradué de $H_*(\wedge \hat{X},k)$ sur $\tilde{H}_*(S_*(\hat{X}),k)$.

Soit π la projection canonique de $\hat{X}$ sur X.

On a le diagramme commutatif suivant :

...

$$\begin{array}{ccc} H_*(\wedge \hat{X}, k) & \xrightarrow{\pi_*} & H_*(\wedge X, k) \\ \downarrow \hat{\rho}_* & & \downarrow \rho_* \\ \tilde{H}_*(S_*(\hat{X}, k) & \xrightarrow{\pi'_*} & \tilde{H}_*(S_*(X), k) \end{array}$$

On vérifie aisément que π'_* est surjectif.

Comme $\hat{\rho}_*$ et ρ_* sont des isomorphismes, il en résulte que π_* est surjectif.

Théorème 8.

Soit a l'élément de $H_o(X,k)$ induit par le point base de X. Alors $H_*(\wedge X, k)$ est le $H_*(\wedge S^\circ, k)$ - hypermodule engendré par l'hypermodule $H_*(\wedge \hat{X}, k)$ et soumis aux relations d'algèbre suivantes :

i) $a = 1$

ii) pour toute suite finie $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ d'entiers positifs ou nuls :

$$i_r \neq 0 \Rightarrow a(i_1) * a(i_2) * \ldots * a(i_r) * a = 0$$

La relation i) est évidente.

Soient I le sous-espace de $H_*(\wedge \hat{X}, k)$ engendré par les éléments de la forme $a(i_1) * \ldots * a(i_r) * a$ avec $i_r \neq 0$ et J le sous-espace de $H_*(\wedge \hat{X}, k)$ engendré par les éléments de la forme $a(i_1) \times \ldots \times a(i_r) \times a$ avec $i_r \neq 0$.

On vérifie, par récurrence sur r, que I est égal à J. La relation ii) est alors conséquence du fait que :

$$i \neq 0 \Rightarrow \pi_*(a(i) \times a) = a(i) \times 1 = 0$$

...

ce que l'on va démontrer de la façon suivante :

On a :

$$a(i) \times 1 = a(i) \times 1^p$$

Comme le produit $\times$ est distributif par rapport au produit . , on vérifie que :

$$a(i) \times 1^p = \begin{cases} 0 & \text{si } i \equiv 0 \pmod p \\ (a(\frac{i}{p}) \times 1)^p & \text{si } i \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$i > 0 \Rightarrow a(i) \times 1 = 0$$

Soit A_* l'algèbre engendrée par $H_*(\wedge \hat{X}, k)$ et soumise aux relations i) et ii). Comme on peut facilement exhiber une base d'algèbre de A_*, on vérifie que A_* et $\widetilde{H}(S_*(X), k)$ sont deux algèbres isomorphe

Si X est un C.W.complexe pointé fini, π_* induit alors un isomorphisme d'algèbre de A_* sur $H_*(\wedge X, k)$, et l'on en déduit le théorème pour X quelconque, par fonctionalité.

§ 7 - L'isomorphisme ρ_* de $H_*(\wedge X, k)$ sur $\widetilde{H}_*(S_*(X), k)$.

7.1. L'isomorphisme ρ_* de $H_*(\wedge S^\circ, k)$ sur $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), k)$.

Les deux hyperalgèbres $H_*(\wedge S^\circ, k)$ et $\widetilde{H}_*(S_*(S^\circ), k)$ sont isomorphes et ρ_* est un isomorphisme d'algèbre que nous allons déterminer. Il nous suffira pour cela de calculer les éléments $\rho_*(a(i_1) \times \ldots \times a(i_r))$.

...

a) Première formule relative à $\rho_* n$

Soit r un entier positif. Si l'on choisit une numération de l'ensemble $\{1,\dots,p\}^r$, on en déduit une action de π^r sur $\{1,\dots,p^r\}$ et un morphisme de groupes σ de π^r dans $S(p^r)$, et l'on a :

$$\sigma_*(e(i_1)\otimes\dots\otimes e(i_r)) = a(i_1)\times\dots\times a(i_r)$$

Soient h une application continue de $(\mathbb{R}^\infty)^{p^r}$ dans $\mathbb{R}^\infty$ se factorisant par une application injective de $(\mathbb{R}^\infty)^{p^r}/S(p^r)$ dans $\mathbb{R}^\infty$ et k l'application de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$k\left(\Sigma\lambda_i e_i\right) = e_o + \Sigma\lambda_i e_{i+1}$$

Soient n un nombre entier et A l'ensemble des parties de $\{1,\dots,p^r\}$ de cardinal n.

Si $P = \{i_1,\dots,i_n\}$ est un élément de A, on désignera par ψ_P l'application de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)}$ dans $S_n(S^\circ)\times\mathbb{R}^\infty$ définie par :

$$\psi_P(t_1,\dots,t_{p^r}) = (u, k\circ h(t_{i_1},\dots,t_{i_n}))$$

u étant la classe de $(t_{i_1},\dots,t_{i_n})$ dans $S_n(S^\circ)$.

Soit B une partie de A stable par Π^r. Choisissons une application de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)}$ dans $E(S_n(S^\circ))$ dont les projections sur $S_n(S^\circ)\times\mathbb{R}^\infty$ sont les applications ψ_P, $P\in B$. On obtient alors par passage au quotient une application continue φ_B de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)}/\Pi^r$ dans $\wedge S_n(S^\circ)$.

Lemme 1.

Soit Ω l'ensemble des orbites de A sous l'action de Π^r.

On a alors la formule :

$$\rho_{*n}\circ\sigma_* = \sum_{\omega\in\Omega} {}^{\circ}{}_{*1}\circ\varphi_{\omega *}$$

...

Soit σ' la projection de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)}/\ \Pi^r$ sur $\wedge_{p^r} S^\circ$.

Les applications φ_A et $\varphi_n \circ \sigma'$ sont clairement homotopes et l'on a :

$$\rho_{*n} \circ \sigma_* = \rho_{*1} \circ \varphi_{A_*}$$

D'autre part, si C et C' sont deux parties disjointes de A stables par Π^r, on peut vérifier que, B étant l'union de C et de C', les deux applications φ_B et $\varphi_C \cdot \varphi_{C'}$ sont homotopes.

Comme l'application ρ_* de $H_*(\wedge S_n(S^\circ), k)$ dans $\widetilde{H}_*(S_*(S_n(S^\circ)), k$ est un isomorphisme d'algèbres on a :

$$\forall a, b \in H_*(\wedge S_n(S^\circ), k) :$$

$$\rho_{*1}(a.b) = \rho_{*1}(a) \cdot \rho_{*o}(b) + \rho_{*o}(a) \cdot \rho_{*1}(b)$$

Or, $\rho_{*o}(a)$ est nul si a est de dimension non nulle. On en déduit :

$$\dim a > 0 \quad \text{et} \quad \dim b > 0 \Rightarrow \rho_{*1}(a \cdot b) = 0$$

Soient u un élément de $H_*(\pi^r, k)$ et 1 le générateur canonique de $H_o(\pi^r, k)$. On a :

$$\Delta 1 = 1 \otimes 1$$

$$\dim u > 0 \Rightarrow \Delta u = 1 \otimes u + u \otimes 1 + \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$$

avec :

$$\dim \alpha_i > 0 \qquad \dim \beta_i > 0$$

On en déduit :

$$\rho_{*1} \circ \varphi_{B_*}(1) = \rho_{*1} \circ \varphi_{C_*}(1) \cdot \rho_{*o} \circ \varphi_{C'_*}(1) + \rho_{*o} \circ \varphi_{C_*}(1) \cdot \rho_{*1} \circ \varphi_{C}$$

(1)

$$\dim u > 0 \Rightarrow \rho_{*1} \circ \varphi_{B_*}(u) = \rho_{*o} \circ \varphi_{C_*}(1) \cdot \rho_{*1} \circ \varphi_{C'_*}(u)$$

$$+ \rho_{*1} \circ \varphi_{C_*}(u) \cdot \rho_{*o} \circ \varphi_{C'_*}($$

...

Pour calculer $\rho_{*o} \circ \varphi_{C_*}(1)$ on va procéder comme suit :

Soit m le cardinal de C. Si l'on désigne par a l'élément de $H_o(\wedge S_n(S^\circ), k)$ induit par un point distinct du point base de $S_n(S^\circ)$, on vérifie que l'on a :

$$\varphi_{C_*}(1) = a^m$$

On a donc :

$$\rho_{*o} \circ \varphi_{C_*}(1) = (\rho_{*o}(a))^m$$

On a d'autre part le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_*(\wedge S_n(S^\circ), k) & \xrightarrow{\varphi_{o_*}} & H_*(\wedge S_o(S_n(S^\circ)), k) \\ & {\scriptstyle \rho_{*o}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \rho_{*1}} & \\ & \widetilde{H}_*(S_o(S_n(S^\circ)), k) & \end{array}$$

On a donc :

$$\rho_{*o}(a) = \rho_{*1}(\varphi_{o_*}(a))$$

Il est clair que $\varphi_{o_*}(a)$ est la classe de $H_o(\wedge S_o(S_n(S^\circ)), k)$ induite par le générateur canonique de $\widetilde{H}_o(S_o(S_n(S^\circ), k) = H_o(S^\circ, k)$

Il en résulte que $\rho_{*o}(a)$ est l'unité 1 de l'algèbre $H_*(S_*(S^\circ), k)$ ce qui entraîne :

$$\rho_{*o} \circ \varphi_{C_*}(1) = 1$$

et de même :

$$\rho_{*o} \circ \varphi_{C'_*}(1) = 1$$

On obtient alors la formule suivante :

$$\rho_{*1} \circ \varphi_{B_*} = \rho_{*1} \circ \varphi_{C_*} + \rho_{*1} \circ \varphi_{C'_*}$$

et le lemme s'en déduit immédiatement.

...

b) Calcul de $\rho_{*1} \circ \varphi_{\omega *}$

Soient ω un élément de Ω et P un élément de ω.

On désignera par H le sous-groupe de Π^r stabilisateur de P.

Lemme 2.

Si H est distinct de Π^r, l'application $\rho_{*1} \circ \varphi_{\omega *}$ est nulle.

On désignera par $i_1, \ldots, i_n$ les éléments de P.

On désignera également par X l'espace $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)}/H$ et par Y l'espace $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)}/\Pi^r$, et l'on notera $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ les espaces, respectivement, X et Y pointés chacun par un point extérieur. L'application de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)}$ dans $S_n(S^\circ)$, qui, à $(t_1, \ldots, t_{p^r})$ associe la classe de $(t_{i_1}, \ldots t_{i_n})$ dans $S_n(S^\circ)$ induit par passage au quotient une application pointée f de $\hat{X}$ dans $S_n(S^\circ)$.

D'autre part, l'application de $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)}$ dans $(\mathbb{R}^\infty)^{(p^r)} \times \mathbb{R}^\infty$ qui, à $(t_1, \ldots, t_{p^r})$ associe $(t_1, \ldots, t_{p^r}; k \circ h (t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}))$ induit par passage au quotient une application g de X dans $\hat{X} \times \mathbb{R}^\infty$.

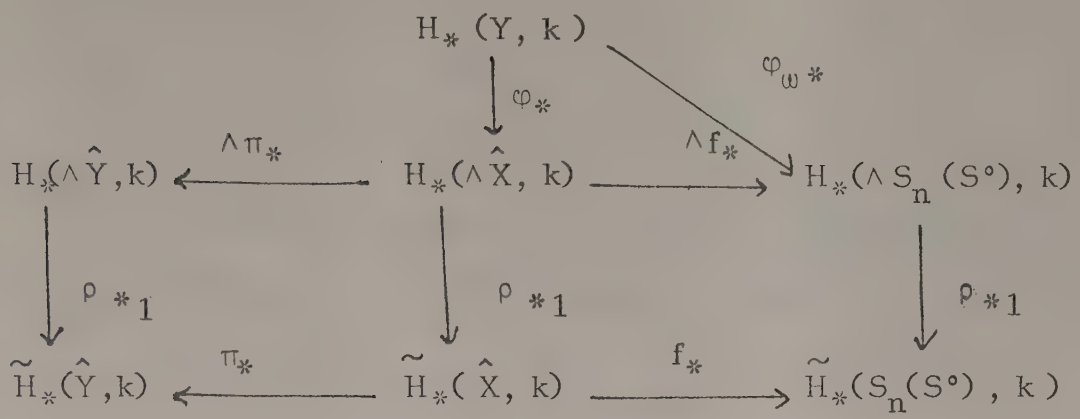
π étant la projection de X dans Y, on désignera par φ l'application de Y dans $\wedge \hat{X}$ telle que, pour tout élément y de Y, les projections sur $\hat{X} \times \mathbb{R}^\infty$ d'un représentant dans $E\hat{X}$ de $\varphi(y)$, soient les images par g des éléments de $\pi^{-1}(y)$.

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \varphi \swarrow & & \searrow \varphi_\omega & \\ \wedge \hat{Y} & \xleftarrow{\wedge \pi} & \wedge \hat{X} & \xrightarrow{\wedge f} & \wedge S_n(S^\circ) \end{array}$$

...

On en déduit le diagramme commutatif suivant :



Soit i l'inclusion canonique de Y dans $\wedge \hat{Y}$.

On vérifie que l'application $\wedge \pi \circ \varphi$ est homotope à i^λ, λ étant l'indice de H dans Π^r. On en déduit, par une méthode analogue à celle du a), la formule suivante :

$$\rho_{*1} \circ \wedge \pi_* \circ \varphi_* = \lambda \, Id$$

Si H est distinct de Π^r, λ est divisible par p et l'on a :

$$\rho_{*1} \circ \wedge \pi_* \circ \varphi_* = 0$$

Or, π_* est injectif, car H est un facteur direct de Π^r.

On a donc :

$$\rho_{*1} \circ \varphi_* = 0 \Rightarrow \rho_{*1} \circ \varphi_{\omega *} = 0$$

et le lemme est démontré.

c) Calcul de $\rho_{*n} \circ \sigma_*$

Si n est différent de 0 et de p^r, le stabilisateur de tout élément P de A est distinct de Π^r. Il résulte alors des lemmes 1 et 2 que $\rho_{*n} \circ \sigma_*$ est nulle.

...

Si n est égal à 0 ou à p^r, A a un seul élément P et l'on vérifie les formules suivantes :

$$n = 0 \Rightarrow \rho_{*n} \circ \sigma_* = 1 \quad \epsilon$$

$$n = p^r \Rightarrow \rho_{*n} \circ \sigma_* = \sigma_*$$

ϵ étant la counité de $H_*(\Pi^r, k)$ et 1 le générateur canonique de $\tilde{H}_o(S_o(S^o), k)$, c'est-à-dire l'unité de l'algèbre $\tilde{H}_*(S_*(S^o), k)$.

d) Calcul de ρ_*

Théorème 9

ρ_* est l'isomorphisme d'algèbres de $H_*(\wedge S^o, k)$ sur $\tilde{H}_*(S_*(S^o), k)$ défini par les égalités i) et ii) ou i) et iii) suivantes :

i) $\rho_*(e) = 1 + e$

ii) $i_1 + \ldots + i_r > 0 \Rightarrow \rho_*(a(i_1) \times \ldots \times a(i_r)) = a(i_1) \times \ldots \times a(i_r)$

iii) $i_1 + \ldots + i_r > 0 \Rightarrow \rho_*(a(i_1) * \ldots * a(i_r)) = a(i_1) * \ldots * a(i_r)$

Les égalités ii) ont été vérifiées au c).

Les formules de transformation du produit $*$ en produit $\times$ entraînent immédiatement les égalités iii).

D'autre part, il est clair qu'il existe deux éléments α et β de k tels que l'on ait :

$$\rho_*(e) = \alpha 1 + \beta e$$

Or, on a :

$$\rho_*(a(0)) = \rho_*(e^p) = (\rho_*(e))^p = \alpha 1 + \beta e^p = \alpha 1 + \beta a(0)$$

On a vu au c) que $\rho_*(a(0))$ est égal à $1 + a(0)$. Il en résulte immédiatement l'égalité i), et l'on vérifie aisément le théorème.

...

7.2. L'isomorphisme ρ_* de $H_*(\wedge X, k)$ sur $\widetilde{H}_*(S_*(X),k)$

Théorème 11.

Soit X un espace topologique pointé ayant le type d'homotopie d'un C.W.complexe pointé. Alors, si l'on désigne par ε la counité de $H_*(X,k)$ et par $u \to \bar{u}$ la projection canonique de $H_*(X,k)$ sur $\widetilde{H}_*(X,k)$, l'isomorphisme d'algèbre ρ_* de $H_*(\wedge X, k)$ sur $\widetilde{H}_*(S_*(X), k)$ est caractérisé par les égalités i) et ii) ou i) et iii) suivantes :

i) $\forall u \in H_*(X,k) \qquad \rho_*(u) = \bar{u} + \varepsilon(u) \cdot 1$

ii) $\forall u \in H_*(X,k)$:

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_r > 0 \Rightarrow \rho_*(a(i_1) \times \ldots \times a(i_r) \times u) = a(i_1) \times \ldots \times a(i_r) \times \bar{u}$$

iii) $\forall u \in H_*(X,k)$

$$i_1 + \ldots i_r > 0 \Rightarrow \rho_*(a(i_1) *_* \ldots *_* a(i_r) *_* u) = a(i_1) * \ldots * a(i_r) * \bar{u}$$

Soit n un entier strictement positif.

Si A est l'espace S° ou l'espace $S_n(S^\circ)$, les produits $\times$ de $\wedge A \wedge A \wedge \wedge X$ dans $\wedge(A \wedge X)$ et de $S_n(S^\circ) \wedge S_*(X)$ dans $S_*(X)$ induisent des produits que l'on notera encore $\times$ de $\wedge A \wedge X$ dans $\wedge(A \wedge X)$ et de $S_n(S^\circ) \wedge X$ dans $S_n(X)$.

On a alors le diagramme homotopiquement commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \wedge S^\circ \wedge X & & \xrightarrow{\times} & & \wedge X \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_n \wedge X} & & & \searrow{\scriptstyle \varphi_n} & \\ \wedge S_n(S^\circ) \wedge X & \xrightarrow{\times} & \wedge(S_n(S^\circ) \wedge X) & \xrightarrow{\wedge \times} & \wedge S_n(X) \end{array}$$

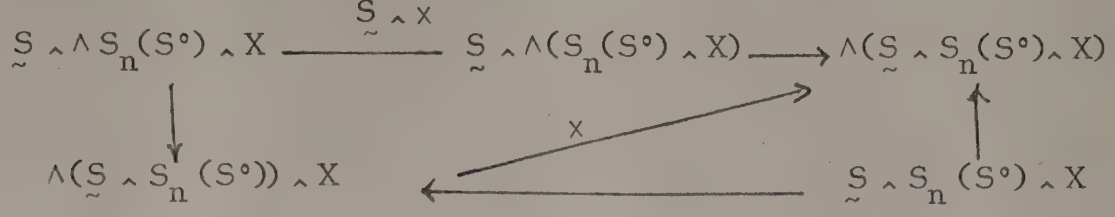
On en déduit la formule suivante :

$\alpha \in H_*(\wedge S^\circ, k)$, $u \in H_*(X, k)$:

$$\rho_{*n}(\alpha \times u) = \rho_{*1}(\varphi_{n*}(\alpha) \times \bar{u})$$

...

On a d'autre part, le diagramme homotopiquement commutatif suivant :



Il en résulte :

$$\alpha \in H_* (\wedge_* S^\circ, k) \qquad u \in H_* (X, k)$$

$$\rho_{*n} (\alpha \times u) = \rho_{*1}(\varphi_{n*}(\alpha) \times \bar{u}) = \rho_{*n} (\alpha) \times \bar{u}$$

Pour calculer ρ_{*o} on va procéder comme suit :

Soit u un générateur canonique de $H_o (X, k)$ représenté par une application pointée f de S° dans X.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \wedge S^\circ & \xrightarrow{\wedge f} & \wedge X \\ \downarrow \rho_{*o} & & \downarrow \rho_{*o} \\ S_*(S^\circ) & \xrightarrow{S_*(f)} & S_* (X) \end{array}$$

On en déduit :

$$\rho_{*o} (u) = 1 + \bar{u}$$

Comme d'autre part, $\rho_{*o} (v)$ est nul si v est un élément de $H_*(\wedge X, k)$ de dimension non nulle, on vérifie que :

$$u \in H_o (X, k) \Rightarrow \rho_{*o} (u) = \varepsilon (u)\, 1 + \bar{u}$$

et

$$u \in H_* (X, k) \,,\ i_1 + \ldots + i_r > 0 \Rightarrow \rho_{*o}(a(i_1) \times \ldots \times a(i_r) \times u) = 0$$

On démontre alors aisément le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

+.+.+.+

[1] J.ADEM. - The relations on Steenrod powers of cohomology classes. Algebraic Geometry and Topology, Princeton University Press, 1956, 191-238.

[2] M.F.ATIYAH. - Immersions and embeddings of manifolds. Topology, 1 (1961), 125-132.

[3] H.CARTAN. - Espaces avec groupes d'opérateurs. Séminaire de topologie algébrique de l'E.N.S., Paris, 1951.

[4] H.CARTAN & S.EILENBERG. - Homological algebra. Princeton University Press, 1956.

[5] A.DOLD. - Homology of symetric products and other functors of complexes. Ann.of Math., 68 (1958), 54-80.

[6] A.DOLD. - Sur les opérations de Steenrod. Colloque International du C.N.R.S., Topologie algébrique et géométrie différentielle, Lille, 1959.

[7] A.DOLD. - Relations between ordinary and extraordinary cohomology. Notes, Aarhus Colloquium on Algebraic Topology, Aarhus, 1962.

[8] S.EILENBERG & S.MACLANE. - Acyclic models. Amer.J.of Math., 15 (1953), 189-199.

[9] S.EILENBERG & N.E.STEENROD. - Foundations of Algebraic Topology. Princeton Math. Ser., 15.

[10] S.EILENBERG & J.ZILBER. - On products on complexes. Amer.J. of Math., 15 (1953), 200-204.

...

[11] A. GRAMAIN. - Sur les immersions de codimension un qui sont des bords. (Thèse). Faculté des sciences d'Orsay, 1969.

[12] A.HAEFLIGER. - Plongements différentiables de variétés dans variétés Comm.Math.Helv., 36 (1961), 47-82.

[13] M.HIRSCH. - Immersions of manifolds. Trans.A.M.S., 93 (1959), 242-276.

[14] W.C.HSIANG & C.T.C.WALL. - Orientability of manifolds for generalized homology theories. Trans.A.M.S.,118 (1965), 352-359.

[15] A.LIULEVICIUS. - A theorem in homological algebra and stable homotopy of projective spaces. Trans. A.M.S.,109 (1963), 540-552.

[16] J.W.MILNOR. - On the immersion of n-manifolds in (n+1)-space. Comm. Math.Helv.,30 (1956), 275-284.

[17] J.W.MILNOR. - The Steenrod algebra and its dual. Ann. of Math., 67 (1958), 150-171.

[18] J.W.MILNOR. - On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Trans.A.M.S. 90 (1959), 272-280.

[19] M.NAKAOKA. - Cohomology mod p of symetric products of spheres. J.Inst.Polyt.,Osaka City Univ., 10 (1959), 67 - 89.

[20] M.NAKAOKA. - Homology of the infinite symmetric group.Ann. of Math 73 (1961), 229-257.

[21] V.POENARU. - Sur la théorie des immersions. Topology, 1 (1962), 81-100.

[22] L.SIEBENMANN. - Le fibré tangent. Fascicule II. Centre de Math.de l'Ecole Polyt.,Paris, 1969.

...

[23] S.SMALE. - The classification of immersions of spheres in euclidian spaces. Ann.of Math., 69 (1959), 327-344.

[24] E.H.SPANIER. - Algebraic topology. Mc Graw-Hill Book Company, New-York, 1966.

[25] N.E.STEENROD. - Homology groups of symmetric groups and reduced power operation. Cyclic reduced powers of cohomology classes. Proc.Nat.Acad.Sci., U.S.A., 39 (1953), 213-223.

[26] N.E.STEENROD. - Cohomology operations derived from the symetric group. Comm.Math.Helv.,31 (1957),195-218.

[27] N.E.STEENROD. - Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions. Colloquium lecture notes, Princeton Univ., 1957.

[28] N.E.STEENROD & D.B.A.EPSTEIN. - Cohomology operations. Princeton University Press, 1962.

[29] R.E.STONG. - Cobordism of maps. Topology, 5 (1966), 245-258.

[30] R.E.STONG. - Notes on cobordism theory. Princeton University Press 1968.

[31] R.THOM. - Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comm. Math.Helv.,28 (1954), 17-86.

[32] R.THOM. - La classification des immersions. Sém.Bourbaki,n°157 (déc.1957).

[33] R.WELLS. - Cobordism groups of immersions. Topology, 5 (1966), 281-294.

[34] G.W.WHITEHEAD. - Generalized homology theories. Trans.A.M.S., 102 (1962),227-283.